ÜBER EINE BESONDERE ART

DER

KONFORMEN ABBILDUNG EINER EBENE

AUF EINE ANDERE.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DES DOKTORGRADES

DER

PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT DER UNIVERSITÄT LEIPZIG

VORGELEGT

VON

JOH. MAX BRÜCKNER.

MIT EINER FIGURENTAFEL.

DRESDEN,
DRUCK VON B. G. TEUBNER.
1886.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545817_0190

Stellung des Problems; allgemeines über konforme Abbildung.

Das von Lagrange gestellte Problem: „Die Teile einer Ebene so auf einer andern Ebene abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich sei, und dass ferner ein System paralleler Geraden in der abzubildenden Ebene durch ein System bestimmter Kurven in der Bildebene abgebildet werde“*, bildet den Ausgangspunkt für die Untersuchungen über konforme Abbildung von Ebenen auf Ebenen, und ist von Lagrange selbst für den Fall gelöst worden, wo die in Frage kommenden Kurven Kreise sind. Sein Verfahren lässt sich jedoch auf beliebige andere vorgeschriebene Kurven nicht anwenden, da von der speziellen Eigenschaft des Kreises, dass sein Krümmungsradius konstant ist, ausgegangen wird. Die allgemeine Lösung der Aufgabe wird vielmehr erreicht, wenn man direkt auf die Gleichung der abzubildenden Kurven zurückgeht, wie dies Herr Professor von der Mühll in seiner Habilitationsschrift: „Über die Abbildung von Ebenen auf Ebenen“** gethan hat. Das daselbst gegebene, noch näher zu detaillierende Verfahren kommt darauf hinaus, eine Funktion zu finden, mittelst welcher jedem Punkte der einen unendlichen Ebene ein oder mehrere Punkte der anderen Ebene der Art zugeordnet werden, dass die Abbildung eine konforme ist und parallelen Geraden der einen Ebene vorgeschriebene Kurven der andern Ebene entsprechen.

Eine zweite Art der Stellung von Problemen über konforme Abbildung ist die, wo man, von gegebenen Funktionen ausgehend, die durch dieselben vermittelten Beziehungen von Figur- und Bildebene untersucht und speziell die zu Geraden der einen Ebene gehörigen Kurven der andern Ebene diskutiert.*** Diese mehr propä-

---

* Lagrange, Sur la construction des Cartes géographiques, Schriften der Berliner Akademie, 1779, § 6, S. 171.

** Abgedruckt in Crelles Journal, Bd. 69, S. 264.

*** Eine Zusammenstellung der einfacheren schon behandelten Funktionen s. bei Holzmüller: „Einführung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der konformen Abbildungen, verbunden mit Anwendungen auf mathematische Physik“, Leipzig 1882. Das Buch enthält ausführliche Litteraturangaben und viele Figurentafeln.

deutische Aufgabe, welche die Umkehrung der vorhin charakterisierten bildet, hängt aufs engste mit der mathematischen Physik zusammen, nämlich mit dem Problem der stationären Strömung, resp. des logarithmischen Potentials. Während also hier die zu gegebenen Funktionen gehörenden Strömungen betrachtet werden, sind bei der ersten Art der Probleme konformer Abbildung die Strömungen gegeben und werden die abbildenden Funktionen gesucht. Dieses Verfahren ist insofern allgemeiner, als mittelst der durch Integration gewisser Differentialgleichungen gewonnenen Funktionen dann sämtliche Kurvensysteme der verlangten Art erhalten werden. Als instruktives Beispiel sei hierzu das in der bereits zitierten Schrift des Herrn Professor von der Mühll behandelte erwähnt, wo parallele Geraden in Kegelschnitte abgebildet werden. Wangerin behandelt mittelst derselben Methode das Problem, wenn die Geraden in konzentrische, koaxiale Kassinische Kurven (Lemniskaten) abzubilden sind.*

Während bei den eben charakterisierten Problemen die zwei unendlichen Ebenen ihrem gesamten Bereiche nach in Betracht gezogen sind, wird nun als drittes Problem noch dies gestellt werden müssen: „Eine Funktion zu suchen, welche zwei gegebene Bereiche mit vorgeschriebener Begrenzung eindeutig aufeinander abbildet“ (Riemann), welches Problem für verschiedene Fälle von Schwarz**, Christoffel u. a. gelöst wurde. Die Aufgabe, welche im folgenden behandelt werden soll, ist von der ersten Art:

„Eine Ebene auf einer andern Ebene so konform abzubilden, dass parallelen Geraden der Figurenebene konzentrische Kassinoiden n^{ter} Ordnung in der Bildebene entsprechen“. Unter Kassinoiden n^{ter} Ordnung verstehen wir hierbei gewisse Kurven $2n^{ten}$ Grades, welche später näher zu definieren sind (s. § 1). Es soll das Problem in der Weise gelöst werden, wie es in der oben zitierten Schrift des Herrn Professors von der Mühll allgemein angezeigt ist, und sei es daher gestattet, zunächst kurz im folgenden die allgemeine Methode zu reproduzieren, wobei wir uns auf das für uns später Nötige beschränken dürfen.

Seien t, u die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes in der abzubildenden Ebene, bezogen auf ein festes Koordinatensystem, T, U

* Wangerin: „Über eine neue Art der konformen Abbildung einer Ebene auf eine andere“, Grunerts Archiv Bd. 55.

** S. Schwarz, Crelles Journ. Bd. 70. Abbildung des Kreises vom Radius Eins auf das Innere resp. Äussere eines Quadrates. — Desgl. das Innere einer Parabel und Ellipse auf das Innere eines Kreises. Weitere Litteratur s. Holzmüller.

die rechtwinkligen Koordinaten des ihm entsprechenden Punktes in der Bildebene, ds und dS entsprechende Kurvenelemente in beiden Ebenen. Dann gilt, soll die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich sein, nach Lagrange das System von Gleichungen*:

$$T + iU = f(t + iu), \quad T - iU = \varphi(t - iu),$$

worin f und φ beliebige Funktionen von $t + iu$, resp. $t - iu$ bedeuten, die jedoch konjugiert komplex sein müssen, da T und U reell sein sollen. Letztere genügen als Funktionen von t und u den partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial u^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial u^2} = 0,$$

und für entsprechende Kurvenelemente ds und dS gilt: $dS = p\,ds$, worin p, der sog. Abbildungsmodul, eine Funktion der Stelle ist, d. h. nur von der Lage von ds, nicht von seiner Richtung abhängt.

Den Geraden $t = const$, d. h. den Parallelen zur Ordinatenaxe in der Figurenebene sollen nun die Kurven

$$\Phi(T, U, a_1, a_2 \ldots a_n) = 0$$

in der Bildebene entsprechen. Hierin sind $a_1, a_2 \ldots a_n$ Parameter, die nur von t abhängen können, denn für $t = const$ müssen es Konstante sein. Eliminieren wir aus

$$T = \frac{f(t + iu) + \varphi(t - iu)}{2} \quad \text{und} \quad U = \frac{f(t + iu) - \varphi(t - iu)}{2i}$$

die Variable u, so ergiebt sich die Resultante $\Phi(T, U, t) = 0$, welche übereinstimmen soll mit der Gleichung der Kurven $\Phi(T, U, a_1, a_2 \ldots a_n) = 0$. Setzen wir also in die letzte Gleichung die obigen Werte von T, U ein, so ergiebt sich eine Identität:

$$\Phi(f, \varphi, a_1, a_2 \ldots a_n) = 0,$$

worin, wie immer im folgenden, f und φ zur Abkürzung für $f(t + iu)$ und $\varphi(t - iu)$ geschrieben ist. Differentiieren wir diese Identität n-mal nach u und eliminieren aus den $n + 1$ Gleichungen die Parameter $a_1, a_2 \ldots a_n$, so erhalten wir eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung zwischen den Funktionen f und φ, deren Integration nach den ge-

---

* Siehe auch: Gauss, Ges. Werke Bd. IV „Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Teile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird." S. 199 flg.

wöhnlichen Verfahren im allgemeinen nicht ohne weiteres möglich ist, da f Funktion des Argumentes $t + iu$, φ dagegen Funktion des Argumentes $t - iu$ ist. Für die weitere allgemeine Behandlung des Problems verweisen wir auf die Originalschrift. In unserm zu lösenden Probleme ist nämlich die Differentialgleichung von der speziellen Form:

$$F(f, f', f'' \dots f^{(n)}) = F(\varphi, \varphi', \varphi'' \dots \varphi^{(n)}),$$

d. h. es steht rechts und links dieselbe Funktion zweier verschiedener, voneinander unabhängiger Argumente $t + iu$ und $t - iu$. Soll aber eine Funktion einer Variabeln gleich derselben Funktion einer andern unabhängigen Variabeln sein, so ist die Funktion eine Konstante. Es genügt also f der Differentialgleichung:

$$F(f, f', f'' \dots f^{(n)}) = const,$$

über deren Integration im allgemeinen sich nichts sagen lässt.

Gelingt dieselbe in dem zur Lösung vorgelegten Probleme, so ergiebt sich in $T + iU = f(t + iu)$ die Funktion, welche jedem Punkte t, u der abzubildenden Ebene einen oder mehrere Punkte T, U der Bildebene derart zuordnet, dass den Geraden $t = const$ der Figurenebene die verlangten Kurven $\Phi(T, U, a_1 \dots a_n) = 0$ der Bildebene entsprechen. Die Abbildung selbst aber ist eine konforme, bis auf etwaige diskrete Punkte, in denen die Konformität gestört sein kann.

Die Aufgabe, die uns gestellt ist, erfordert zunächst eine eingehendere Diskussion der in Frage kommenden Kurven; als dann werden wir nach der eben skizzierten Methode die abbildende Funktion durch Integration einer gewissen Differentialgleichung aufzusuchen haben. Wir werden dann zeigen, dass die, mittelst dieser gefundenen Funktion bewirkte Abbildung der parallelen Geraden in konzentrische Kassinoiden n^{ter} Ordnung auch beim Studium einfacher Funktionen resultiert, d. h. dass die Kurven als Strömungskurven betrachtet werden können, welche einem einfachen logarithmischen Potentiale zugehören. In dieser Weise werden die früher charakterisierten beiden Methoden der konformen Abbildung hier direkt in Verbindung gesetzt. Des ferneren werden wir die geometrischen Eigenschaften der abgebildeten Kurven eingehend zu diskutieren haben, sowie die Ein- resp. Mehrdeutigkeit der Abbildung nach der von Riemann vorgezeichneten Weise klar legen. Schliesslich bleiben noch die speziellen Fälle zu untersuchen, welche bei besonderer einfacherer Wahl der abbildenden Funktion resultieren.

Die Anregung zu der vorliegenden Arbeit erhielt ich im mathematisch-physikalischen Seminar des Herrn Professor von der Mühll. Es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Professor von der Mühll, sowie Herrn Professor Klein für die vielfache Förderung und Anregung, die sie mir bei dieser Arbeit wie sonstigen Studien zu teil werden liessen, auch an dieser Stelle meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

---

§ 1.

Die Kassinoiden n^{ter} Ordnung.

Es seien $a_1 b_1$, $a_2 b_2 \ldots a_n b_n$ die rechtwinkligen Koordinaten der Eckpunkte eines regulären Polygons in der T, U-Ebene, dessen Mittelpunkt in den Koordinatenanfang fällt, und $a_1 = a$, $b_1 = b$ die Koordinaten desjenigen dieser n Punkte, der von einem von der positiven T-Axe aus entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn sich drehenden Radiusvektor zuerst überschritten wird. Dann sind die $a_p + i b_p$ die Wurzeln der Gleichung

$$1) \qquad (T + iU)^n - (a + ib)^n = 0.$$

Bezeichnen wir nun mit $r_1, r_2 \ldots r_n$ die Abstände (Radienvektoren) eines Punktes mit den Koordinaten T, U von diesen n festen Eckpunkten des Polygons, so sind die Kassinoiden n^{ter} Ordnung folgendermassen definiert:

Die Kassinoide n^{ter} Ordnung ist der geometrische Ort aller der Punkte, für welche das Produkt der Radienvektoren nach den n festen Eckpunkten des Polygons einen konstanten Wert hat.

Bezeichnen wir diese Konstante mit λ^n, so lautet die Gleichung der Kassinoide n^{ter} Ordnung demgemäss $r_1 . r_2 . r_3 \ldots r_n = \lambda^n$, oder nach Einführung rechtwinkliger Koordinaten:

$$\prod_{p=1}^{p=n} [(T - a_p)^2 + (U - b_p)^2] = \lambda^{2n}.$$

Dies können wir auch schreiben:

$$\prod_{p=1}^{p=n} [T + iU - (a_p + ib_p)] . \prod_{p=1}^{p=n} [T - iU - (a_p - ib_p)] = \lambda^{2n}.$$

Da nun $a_p + ib_p$ die Wurzeln der Gleichung 1) sind und somit $a_p - ib_p$ die Wurzeln der Gleichung $(T - iU)^n - (a - ib)^n = 0$, so erhalten wir aus obigem in

2) $[(T+iU)^n-(a+ib)^n].[(T-iU)^n-(a-ib)^n]=\lambda^{2n}$

die Gleichung der Kassinoide n^{ter} Ordnung in rechtwinkligen Koordinaten. Um dieselbe auf reelle Form zu bringen, entwickeln wir die vorkommenden Potenzen von Binomen und trennen Reelles und Imaginäres. Sind Q, R, q, r Funktionen von T, U resp. a, b, welche definiert sind durch:

$$Q\equiv\sum_{p=0}^{p=n}[1+(-1)^p]\,i^p\binom{n}{p}T^{n-p}U^p,$$

$$R\equiv\sum_{p=0}^{p=n}[1+(-1)^{p+1}]\,i^{p+1}\binom{n}{p}T^{n-p}U^p,$$

$$q\equiv\sum_{p=0}^{p=n}[1+(-1)^p]\,i^p\binom{n}{p}a^{n-p}b^p,$$

$$r\equiv\sum_{p=0}^{p=n}[1+(-1)^{p+1}]\,i^{p+1}\binom{n}{p}a^{n-p}b^p,$$

so ist

$$(T\pm iU)^n=\tfrac{1}{2}(Q\mp iR);\quad(a\pm ib)^n=\tfrac{1}{2}(q\mp ir)$$

und Gleichung 2) lässt sich dann schreiben:

3) $$(T^2+U^2)^n-\frac{q}{2}Q-\frac{r}{2}R=\lambda^{2n}-(a^2+b^2)^n.$$

In dieser Form wollen wir die Gleichung der Kurve unseren Untersuchungen zu Grunde legen. Wir haben also das Resultat: Die Kassinoiden n^{ter} Ordnung sind Kurven $2n^{\text{ten}}$ Grades mit drei voneinander unabhängigen Konstanten (Parametern) q, r, λ, von denen die beiden ersten homogene Funktionen n^{ten} Grades der Koordinaten a, b eines der n festen Eckpunkte des oben näher bezeichneten Polygons sind, welche Punkte wir insgesamt als **Brennpunkte** der Kurve bezeichnen wollen.

Da die absoluten Beträge der Koordinaten a_p+ib_p der Brennpunkte gleich sind, so ist der Koordinatenanfang Mittelpunkt der Kurve, und zwei Kassinoiden, die sich durch die Parameter q, r, λ unterscheiden, sind konzentrisch. Setzen wir also zur Abkürzung in Gleichung 3)

$$\lambda^{2n}-(a^2+b^2)^n\equiv\Lambda,$$

so sind

4a) $$(T^2+U^2)^n-\frac{q_1}{2}Q-\frac{r_1}{2}R-\Lambda_1\equiv G_1=0$$

und

4b) $$(T^2+U^2)^n-\frac{q_2}{2}Q-\frac{r_2}{2}R-\Lambda_2\equiv G_2=0$$

die Gleichungen zweier konzentrischer Kassinoiden. In $G_1-\tilde{\omega}G_2=0$ erhalten wir dann bei variablem Parameter $\tilde{\omega}$ $(-\infty\lessgtr\tilde{\omega}\leqq+\infty)$ ein

ganzes System von Kassinoiden, welche sämtlich mit den beiden Grundkurven 4a) und 4b) konzentrisch sind, denn die Gleichung lautet ausgeschrieben:

$$4c) \quad (T^2+U^2)^n - \frac{1}{2}\frac{q_1-\tilde{\omega}q_2}{1-\tilde{\omega}}Q - \frac{1}{2}\frac{r_1-\tilde{\omega}r_2}{1-\tilde{\omega}}R - \frac{\Lambda_1-\tilde{\omega}\Lambda_2}{1-\tilde{\omega}} = 0.$$

Geht nun die Kurve 4a) durch den Punkt $T = T_1$, $U = U_1$, so geht sie auch durch die $n-1$ Punkte, welche durch die übrigen Wurzeln der Gleichung $(T+iU)^n - (T_1+iU_1)^n = 0$ gegeben sind, wie sich bei Betrachtung von Gleichung 2) deutlich zeigt. Geht dieselbe Kurve durch den Punkt $T = T_2$, $U = U_2$, so liegen auf ihr noch die $n-1$ Punkte, welche durch die übrigen Wurzeln der Gleichung $(T+iU)^n - (T_2+iU_2)^n = 0$ gegeben sind. Geht auch die Kurve 4b) durch die Punkte $T = T_1$, $U = U_1$, $T = T_2$, $U = U_2$, so hat sie ausserdem mit der Kurve 4a) die eben erwähnten $2(n-1)$ Punkte gemein. Da wir in der Gleichung der Kassinoide nur über die drei Konstanten q, r, λ verfügen können, so dürfen wir keinen weitern Punkt $T_3 U_3$ den Kurven 4a) und 4b) als gemeinsam vorschreiben, ohne dass sie ganz zusammenfielen. Wenn aber die Grundkurven 4a) und 4b) $2n$ gemeinschaftliche Punkte haben, so gehen sämtliche Kurven 4c) durch diese $2n$ Punkte, und wir bezeichnen dieses System als Kassinoidenbüschel. Haben die Kurven 4a) und 4b) keinen Punkt gemeinsam, so gilt dies von sämtlichen Kurven 4c). Dieses System bezeichnen wir als Kassinoidenschar.* Es sei bereits hier der **Satz** angeführt, dessen Beweis sich später einfach aus der Differentialgleichung der abbildenden Funktion ergiebt: „Die orthogonalen Trajektorien der Kurven eines Kassinoidenbüschels sind, allgemein zu sprechen, Kassinoiden einer Schar und umgekehrt.“

Die $2n$ Punkte, durch welche sämtliche Kurven eines Büschels gehen, die sog. Büschelpunkte, auch Grenzpunkte genannt, bilden nach obigem die Ecken zweier beliebig gegeneinander gelegener konzentrischer regulärer Polygone. Je nach der Lage der Eckpunkte dieser beiden Vielecke werden die Systeme von Kurven, sowohl Schar als Büschel, die mannigfaltigste Gestalt annehmen können. Man beachte

---

* Zum Verständnis des obigen sei auf den speziellen Fall $n = 1$ hingewiesen. Die Kurven sind dann Kreise mit der Gleichung:

$$T^2 + U^2 - 2aT - 2bU = \lambda^2 - (a^2+b^2),$$

wo a, b die Koordinaten des einen Brennpunktes (Centrums) sind. Die beiden Systeme sind als Kreisschar und Kreisbüschel bekannt (Steinersche Kreise, s. Crelles J. Bd. I). Die Kreise des Büschels gehen sämtlich durch zwei Punkte, um welche sich dann die Kreise einer Schar als ihrer Grenze herumschlingen; s. die nächste Anmerkung.

bereits hier die Figuren 1, 7 bis 12, in denen die Büschelpunkte stärker markiert sind.

Es ist natürlich völlig gleichgiltig, welche zwei Kurven aus dem System 4c) wir als Grundkurven herausgreifen. — Unter den Kassinoiden sowohl der Schar als des Büschels befindet sich je eine Kurve besondern Charakters, welche für $\tilde{\omega} = 1$ erhalten wird. Ihre Gleichung ist also:

$$5) \qquad \frac{q_1 - q_2}{2} Q + \frac{r_1 - r_2}{2} \lambda = \Lambda_1 - \Lambda_2.$$

Dies ist eine Kurve n^{ten} Grades, welche wir reguläre Hyperbel n^{ter} Ordnung nennen, weil für $n = 2$ die gewöhnliche gleichseitige Hyperbel resultiert.* Für $\Lambda_1 = \Lambda_2$ zerfällt dieselbe in ein Büschel von n Geraden durch den Koordinatenanfang. Zur weiteren Diskussion der Gestalt unserer Kurven betrachten wir deren Gleichung in Polarkoordinaten.

Ist $T = \varrho \cos\varphi$, $U = \varrho \sin\varphi$, so folgt aus Gleichung 3):

$$6) \qquad \varrho^{2n} - \varrho^n (q \cos n\varphi - r \sin n\varphi) = \Lambda.$$

Aus dieser Gleichung lässt sich zunächst wieder direkt ablesen: Sind $r_1\varphi_1$, $\varrho_2\varphi_2$ zwei Punkte der Kurve, so geht dieselbe auch noch durch die $2(n-1)$ Punkte $\varrho_1, \varphi_1 + \frac{2p\pi}{n}$; $\varrho_2, \varphi_2 + \frac{2p\pi}{n}$; $p = 1, 2, \ldots n-1$.

Die n Punkte $\varrho, \varphi + \frac{2p\pi}{n}$; $p = 0, 1, \ldots n-1$, haben also gleiche Radienvektoren, von denen jeder mit dem folgenden den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ bildet. Zu einem bestimmten Winkel φ gehören höchstens zwei verschiedene reelle ϱ, welche sich je ergeben als die positive reelle Wurzel ϱ' resp. ϱ'' der aus 6) folgenden beiden Gleichungen:

$$\varrho^n - \frac{1}{2}\left\{ q \cos n\varphi - r \sin n\varphi \pm \sqrt{(q \cos n\varphi - r \sin n\varphi)^2 + 4\Lambda} \right\} = 0.$$

(Die übrigen Radienvektoren sind sämtlich komplex, wenn nicht alle gleichzeitig Null sind.) Jenachdem beide Wurzeln ϱ' und ϱ'' reell sind oder nur eine, haben wir folgende Fälle zu unterscheiden.

---

* Diese Bezeichnung s. bei H. Holzmüller in dem S. 3 zitierten Buche. Den Namen Stelloide giebt Lucas einer Klasse von Kurven, von denen die regulären Hyperbeln n^{ter} Ordnung ein Spezialfall sind; wir könnten letztere daher auch reguläre Stelloiden nennen. S. Lucas: Géometrie des polynomes, Journ. de l'Ecole polytechnique. 46 (1879). S. auch das Schlusswort dieser Arbeit. — Für $n = 1$, d. h. bei den Steinerschen Kreisen treten statt der Hyperbeln Gerade, die sog. Potenzlinien auf, weshalb H. Holzmüller die Hyperbeln als „Potenzhyperbeln" bezeichnet. Doch scheinen dieselben eine ähnliche einfache Rolle, wie die Geraden im Kreissystem nicht zu spielen.

I. $\Lambda = 0$, also $\varrho^n = q \cos n\varphi - r \sin n\varphi$ und $\varrho^n = 0$. Diese Kurve geht durch den Koordinatenanfang und hat daselbst den n-fachen Punkt $\varrho''^n = 0$. Wir bezeichnen sie als Lemniskate n^{ter} Ordnung, weil für $n = 2$ die gewöhnliche Lemniskate resultiert. Der zweite Schnittpunkt des Radiusvektors mit der Kurve ist bei bestimmtem φ reell (ausserhalb des Koordinatenanfangs), wieder der Koordinatenanfang, oder komplex, je nachdem $q \cos n\varphi - r \sin n\varphi \gtrless 0$ ist. Die Wurzeln φ der Gleichung $q \cos n\varphi - r \sin n\varphi = 0$ geben somit die Richtung der Tangenten an die Lemniskate im Koordinatenanfang.

II. $\Lambda > 0$. Dann ist ϱ''^n negativ, also unbrauchbar. Zu jedem Werte von φ gehört demnach nur ein Wert $\varrho = \varrho'$, der nie Null oder unendlich werden kann, solange nicht die Konstanten q, r selbst unendlich werden. Diese Kurve besteht somit aus einem geschlossenen Zuge um den Koordinatenanfang: **Einzügige Kassinoide.**

III. $\Lambda < 0$. Hier gehören zu einem bestimmten φ zwei reelle verschiedene Werte ϱ' und ϱ'', zwei reelle gleiche Werte $\varrho' = \varrho''$, oder zwei komplexe Werte, jenachdem

$$(q \cos n\varphi - r \sin n\varphi)^2 + 4\Lambda \gtrless 0$$

ist. Die Punkte, für welche dieser Ausdruck verschwindet, sind diejenigen, für welche die Radienvektoren nach dem Koordinatenanfang Tangenten an die Kurve sind. Diese besteht aus n getrennten Ovalen: n-**zügige Kassinoide**, welche zwischen zwei konzentrischen Kreisen um den Koordinatenanfang liegen, den einen der Kreise von aussen, den andern von innen tangierend.

Für die Hyperbel erhalten wir bei Einführung von Polarkoordinaten in Gleichung 5):

$$2\varrho^n = \frac{\Lambda_1 - \Lambda_2}{(q_1 - q_2)\cos n\varphi - (r_1 - r_2)\sin n\varphi}.$$

Es sind also die Geraden $\varrho = \varrho$, $tang\, n\varphi = \frac{q_1 - q_2}{r_1 - r_2}$ Asymptoten der Kurve, welche aus n hyperbelartig ins Unendliche verlaufenden Ästen besteht. Ist $\Lambda_1 - \Lambda_2 = 0$, so zerfällt die Kurve in die n Geraden durch den Koordinatenanfang:

$$\varrho = \varrho,\ tang\, n\varphi = \frac{q_1 - q_2}{r_1 - r_2}.$$ *

* Die Kassinoiden n^{ter} Ordnung behandeln u. a.: Barnaba Tortolini: „Über einige algebraische Kurven, von denen die Lemniskate ein spezieller Fall ist", Zeitschr. f. Math. u. Physik v. Schlömilch Bd. 6. (S. auch Annali di Matematica pura ed applicata, Nr. 3, S. 178.) Fagnano: „Produzioni matematiche" Bd. 2, schediasma 1, S. 375. A. Serret: „Note sur les intégrales Eulériennes", J. v. Liouville Bd. 7 u. 8, sowie in „Propriétés géometriques relatives à la théorie

§ 2.

Die Differentialgleichung der abbildenden Funktion und ihre Integration.

Es soll im folgenden die Differentialgleichung der abbildenden Funktion nach den in der Einleitung entwickelten Grundsätzen aufgestellt und integriert werden. Wir führen zu dem Behufe $T + iU = f$ und $T - iU = \varphi$ in die Gleichung 2) der Kassinoiden ein und erhalten, wenn wir zur Abkürzung noch α und β statt $(a + ib)^n$ und $(a - ib)^n$ schreiben:

$$(f^n - \alpha)(\varphi^n - \beta) = \lambda^{2n}$$

oder, wenn $f^n = F$, $\varphi^n = \Phi$ gesetzt ist:

$$(F - \alpha)(\Phi - \beta) = \lambda^{2n}.$$

Hierin ist F Funktion von $t + iu$, Φ von $t - iu$. Differentiieren wir diese letztere Identität nach u, so ergiebt sich, da α, β und λ nur Funktionen von t sind und da $\frac{\partial F(t+iu)}{\partial u} = iF'(t+iu)$ und $\frac{\partial \Phi(t-iu)}{\partial u} = -i\Phi'(t-iu)$, bei Weglassung des allen Gliedern gemeinschaftlichen Faktors i:

7) $$\beta F' - \alpha\Phi' = F'\Phi - F'\Phi.$$

Durch wiederholte Differentiation erhalten wir:

8) $$\beta F'' + \alpha\Phi'' = F''\Phi - 2F'\Phi' + F\Phi''$$

und

9) $$\beta F''' - \alpha\Phi''' = F'''\Phi - 3F''\Phi' + 3F'\Phi'' - F\Phi'''.$$

Damit die drei Gleichungen 7), 8) und 9) bestehen können, ist notwendig, dass ihre Determinante verschwindet. Es ist also:

$$\begin{vmatrix} F', & -\Phi', & F'\Phi - F\Phi', \\ F'', & \Phi'', & F''\Phi - 2F'\Phi' + F'\Phi'' \\ F''', & -\Phi''', & F'''\Phi - 3F''\Phi' + 3F'\Phi'' - F\Phi''' \end{vmatrix} = 0,$$

oder

---

des fonctions elliptiques". Darboux: „Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la théorie des imaginaires". Die Kassinoiden sind hiernach ein Spezialfall der allgemeineren Kurven, welche Lucas in dem vor. Anm. zitierten Aufsatze bespricht. — Während in den vorstehenden Abhandlungen besonders analytische Untersuchungen angestellt sind, findet sich geometrisches bei Holzmüller „Theorie der isog. Verwandtschaften etc." Haton de la Goupillière: „Mémoire sur une nouvelle théorie générale des lignes isothermes et du potentiel cylindrique", Journ. de l'Ecole polyt. 38. Für $n = 4$ ist daselbst das System konzentrischer konfokaler Kurven gezeichnet. Hildebrandt: „Über die stationäre elektrische Strömung in einer unendlichen Ebene und einer Kugeloberfläche" (Dissertation, Göttingen 1881).

$$\begin{vmatrix} F', & -\Phi', & 0 \\ F'', & \Phi'', & -2F'\Phi' \\ F''', & -\Phi''', & -3(F''\Phi' - F'\Phi'') \end{vmatrix} = 0.$$

Lösen wir diese Determinante auf und bringen alle Glieder, welche F enthalten, auf die linke, alle Glieder mit Φ auf die rechte Seite, so erhalten wir schliesslich:

$$10) \qquad \frac{2F'F''' - 3F''^2}{F'^2} = \frac{2\Phi'\Phi''' - 3\Phi''^2}{\Phi'^2}.$$

Nach unseren früheren Betrachtungen kann diese Gleichung zwischen F und Φ nur bestehen, wenn jede Seite derselben Konstanten gleich ist. Diese Konstante muss hier reell sein, da sie bei Vertauschung von i mit $-i$ ihren Wert nicht ändern darf. Wir setzen sie gleich $-\varkappa^2$, wo also $\varkappa$ reell oder rein imaginär, sowie Null sein kann, und haben somit für die Funktion F die Differentialgleichung

$$11) \qquad \frac{2F'F''' - 3F''^2}{F'^2} = -\varkappa^2.$$

Da die Funktion Φ derselben Differentialgleichung genügt, so ergiebt sich der Satz: Sowohl den Geraden $t = const$, als den Geraden $u = const$ entsprechen im allgemeinen in der T, U-Ebene konzentrische Kassinoiden n^{ter} Ordnung, welche orthogonal zu einander sind, da die Geraden $t = const$ und $u = const$ der t, u-Ebene einander rechtwinklig kreuzen, und dies von den abgebildeten Kurven ebenfalls gelten muss, weil die Abbildung eine konforme ist, d. h. die Winkel zweier Kurvenelemente erhalten bleiben.

Die Gleichung 11) kann geschrieben werden:*

$$\frac{d^2\left(F'^{-\frac{1}{2}}\right)}{(dt + i\,du)^2} = \frac{\varkappa^2}{4} F'^{-\frac{1}{2}}.$$

Folglich ist:

$$F'^{-\frac{1}{2}} = C_1 e^{\frac{\varkappa}{2}(t+iu)} + C_2 e^{-\frac{\varkappa}{2}(t+iu)},$$

also

$$F = \int \frac{dt + i\,du}{\left(C_1 e^{\frac{\varkappa}{2}(t+iu)} + C_2 e^{-\frac{\varkappa}{2}(t+iu)}\right)^2} + const,$$

oder es ergiebt sich, wenn wir wieder f'' statt F setzen und die Quadratur ausführen, als Funktion, welche die verlangte Abbildung

* Man setze in 11) $F' = y^{-2}$, wo y Funktion von $t + iu$ ist, also $F'' = -2y^{-3}y'$, $F''' = 6y^{-4}y'^2 - 2y^{-3}y''$. Dann lautet die transformierte Differentialgleichung: $y'' = \frac{\varkappa^2}{4} y$, oder da $y = F'^{-\frac{1}{2}}$ ist, ergiebt sich die obengeschriebene Form.

der orthogonalen Geraden der t, u-Ebene in konzentrische Kassinoiden der T, U-Ebene leistet, die folgende:

$$12) \qquad f \equiv T + iU = C \sqrt[n]{\frac{1 + (A + iB)\, e^{\varkappa (t+iu)+\alpha}}{1 + e^{\varkappa (t+iu)+\alpha}}}.$$

Hierin sind A, B und C reelle Konstanten, α kann jedoch komplex sein. Da aber eine Änderung der Konstanten α nichts anderes bewirkt, als eine Änderung der Lage des Koordinatensystems in der Ebene der t, u, so können wir über diese Konstante nach Belieben verfügen, sie also auch Null setzen. Doch wird es in einigen Spezialfällen nötig sein, ihr den Wert $-\varkappa$, resp. $i\pi$ zu geben, damit die Abbildung nicht illusorisch wird. Die Konstante $\varkappa$ schliesslich setzen wir stets reell, da ein imaginäres $\varkappa$ nur eine Vertauschung der t- und u-Axe giebt. Wird $\varkappa = 0$, so hat die Differentialgleichung zur Lösung:

$$f \quad T + iU = \sqrt[n]{\frac{a + b(t + iu)}{c + d(t + iu)}},$$

welche Funktion nur eine spezielle Abbildung ergiebt, die wir auf anderem Wege direkt aus der allgemeinen ableiten können. Setzen wir der Einfachheit wegen im allgemeinen α 0, so dass also die abbildende Funktion lautet:

$$13) \qquad f \equiv T + iU = C \sqrt[n]{\frac{1 + (A + iB)\, e^{\varkappa (t+iu)}}{1 + e^{\varkappa (t+iu)}}},$$

so folgt:

$$e^{\varkappa (t+iu)} = \frac{(T + iU)^n - C^n}{C^n (A + iB) - (T + iU)^n},$$

oder, wenn wir die früher definierten Funktionen Q und R einführen:

$$14) \qquad e^{\varkappa (t+iu)} = \frac{Q - 2C^n - iR}{2C^n A - Q + i(2C^n B + R)}.$$

Durch Multiplikation dieser Gleichung mit der durch Vertauschung von $+i$ mit $-i$ aus ihr zu erhaltenden, eliminieren wir die Variable u, und es ergiebt sich nach kurzer, leicht verständlicher Rechnung als Gleichung der Kassinoiden, die den Geraden $t = const$ entsprechen:

$$15) \quad (T^2 + t^2)^n - C^n \frac{Ae^{2\varkappa t} - 1}{e^{2\varkappa t} - 1} Q + C^n \frac{Be^{2\varkappa t}}{e^{2\varkappa t} - 1} R = C^{2n} \cdot \frac{1 - (A^2 + B^2) e^{2\varkappa t}}{e^{2\varkappa t} - 1}.$$

Um die Gleichung der den Geraden $u = const$ entsprechenden Kurven zu ermitteln, trennen wir in 14) beiderseits Reelles und Imaginäres und erhalten:

$$e^{\varkappa t} \cos \varkappa u = \frac{(Q - 2C^n)(2C^n A - Q) - R(2C^n B + R)}{(2C^n A - Q)^2 + (2C^n B + R)^2}$$

und

$$e^{\varkappa t}\sin\varkappa u = \frac{-R(2C^n A - Q) - (Q - 2C^n)(2C^n B + R)}{(2C^n A - Q)^2 + (2C^n B + R)^2}.$$

Die Elimination von t mittels Division der ersteren Gleichung durch die zweite ergiebt nach einigen Umformungen für die, den Geraden $u = const$ entsprechenden Kassinoiden die Gleichung:

16) $$(T^2 + U^2)^n - \frac{C^n}{2}(B\cot\varkappa u + A + 1)Q + \frac{C^n}{2}(B - [A-1]\cot\varkappa u)R = -C^{2n}(A + B\cot\varkappa u).$$

Indem wir die weitere Diskussion dieser und der obigen Gleichung einem späteren Paragraphen zuweisen, seien hier nur noch diejenigen Betrachtungen angestellt, welche bei den nächstfolgenden Untersuchungen als bekannt vorausgesetzt werden müssen.

Aus der abbildenden Funktion 13) lassen sich zunächst direkt folgende Schlüsse ziehen:

1. Den Punkten $u = u$, $t = -\infty$ und $u = u$, $t = +\infty$ entsprechen in der T, U-Ebene je n Punkte mit den Koordinaten:

17) $$T + iU = C\sqrt[n]{1}; \text{ resp. } T + iU = C\sqrt[n]{A + iB},$$

d. h. die den Punkten $t + iu = \mp\infty$ entsprechenden Punkte der T, U-Ebene bilden die Ecken zweier regulärer, konzentrischer, sonst beliebig gegeneinander gelegener Polygone. Da nun sämtliche Geraden $u = const$ die beiden Punkte $t + iu = \mp\infty$ enthalten, so ergiebt sich der Satz:

Die den Geraden $u = const$ entsprechenden Kassinoiden n^{ter} Ordnung in der T, U-Ebene bilden ein Kurvenbüschel, dessen $2n$ Büschelpunkte die Punkte 17) sind, welche den beiden unendlich fernen Punkten der t-Axe in der t, u-Ebene entsprechen.

2. Da $e^{\varkappa(t+iu)}$ in u periodisch ist um $\frac{2\pi}{\varkappa}$, so wird nur ein Streifen der t, u-Ebene parallel der t-Axe, von der Breite $\frac{2\pi}{\varkappa}$, auf die T, U-Ebene abgebildet Da nun von den Geraden $t = const$ nur Stücke von der Länge $\frac{2\pi}{\varkappa}$ dieses betreffenden Streifens in Betracht kommen, welche in die, zu den vorigen orthogonalen Kassinoiden der T, U-Ebene abgebildet werden, und von diesen Stücken keines mit einem anderen einen Punkt gemeinsam hat, dies aber auch von den ihnen entsprechenden Kurven gelten muss, so resultiert der Satz:

Die den Geraden $t = const$ der t, u-Ebene entsprechenden Kassinoiden der T, U-Ebene bilden insgesamt eine Kurvenschar.

Da schliesslich durch passende Wahl der Konstanten A, B, C, $\varkappa$ jedes Büschel konzentrischer Kassinoiden als Bild der Geraden $u = const$ erhalten werden kann, so bilden die Orthogonalkurven eines beliebigen Büschels stets eine Schar Kassinoiden; denn es ist nur ein orthogonales System möglich. Hiermit ist der, Seite 9 behauptete Satz bewiesen. — Die beiden Systeme Kassinoiden, sowie die $2n$ Büschelpunkte zeigt Fig. 1.

§ 3.

Das logarithmische Potential; die Kassinoiden als Niveau- und Strömungskurven.

Es handelt sich im folgenden darum, die Verteilung der Elektrizität in einer unbegrenzten sehr dünnen Platte (Ebene) zu untersuchen, wenn in je n Punkten, die die Ecken zweier regulärer, konzentrischer Polygone bilden, die Elektrizität ein- und ausströmt. Wir bestimmen das logarithmische Potential, sowie die Niveau- und Strömungslinien der stationären Strömung und zeigen, dass diese mit den von uns betrachteten Kassinoiden n^{ter} Ordnung identisch sind.

Aus der Theorie des logarithmischen Potentials ist bekannt*:

Fliessen in n Punkten A_p einer unbegrenzten sehr dünnen Platte (Ebene) die Elektrizitäten E_p ein, in n Punkten B_p die Elektrizitäten E'_p aus, so dass

$$\sum_{p=1}^{p=n} E_p - \sum_{p=1}^{p=n} E'_p = 0,$$

und sind r_p und r'_p die Abstände irgend eines Punktes der Platte von dem Einströmungspunkte A_p und dem Ausströmungspunkte B_p, so entspricht in diesem Punkte das Potential V der Gleichung:

$$V = M - \frac{1}{2\pi k\delta}\left(\sum_{p=1}^{p=n} E_p \log r_p + \sum_{p=1}^{p=n} E'_p \log r'_p\right),$$

worin M eine Konstante, δ die Dicke der Platte und k die spezifische Leitungsfähigkeit bezeichnet.

Setzen wir nun $E_p = E$, $E'_p = -E$, so dass n gleichwertige positive und negative Elektroden vorhanden sind, so kommt:

$$V = M - \frac{E}{2\pi k\delta} \log \frac{r_1 \cdot r_2 \ldots r_n}{r'_1 \cdot r'_2 \ldots r'_n}.$$

* S. Wiedemann, Galvanismus, Bd. I, S. 191; sowie Kirchhoff, Pogg. Ann., Bd. 67, S. 344 (1846).

Wenden wir dies auf die T, U-Ebene als leitende Platte an, wo die eben besprochenen Ein- und Ausströmungspunkte die seither als Büschelpunkte bezeichneten mit den Koordinaten $\alpha_p + i\beta_p$, $\alpha'_p + i\beta'_p$ sein mögen, welch letztere nach Gleichung 17) des vorigen Paragraphen die Wurzeln der Gleichungen

$$18) \qquad \begin{cases} (\alpha_p + i\beta_p)^n = C^n, \\ (\alpha'_p + i\beta'_p)^n = C^n(A + iB) \end{cases}$$

sind, so ergeben sich in

$$\frac{r_1 r_2 \dots r_n}{r'_1 r'_2 \dots r'_n} = \sigma \quad \text{oder} \quad \frac{\prod_{p=1}^{p=n} r_p^2}{\prod_{p=1}^{p=n} r'^2_p} = \sigma^2$$

die Kurven konstanten Potentials (Niveaulinien, isoelektrische Kurven). Dabei bezeichnet σ einen von Kurve zu Kurve variabeln Parameter. Nun ist:

$$r_p^2 = (T - \alpha_p)^2 + (U - \beta_p)^2,$$
$$r'^2_p = (T - \alpha'_p)^2 + (U - \beta'_p)^2,$$

oder:

$$r_p^2 = [T + iU - (\alpha_p + i\beta_p)]\,[T - iU - (\alpha_p - i\beta_p)],$$
$$r'^2_p = [T + iU - (\alpha'_p + i\beta'_p)]\,[T - iU - (\alpha'_p - i\beta'_p)].$$

Demnach ergiebt sich mit Rücksicht auf die Gleichungen 18):

$$\prod_{p=1}^{p=n} r_p^2 = [(T + iU)^n - (\alpha + i\beta)^n]\,[(T - iU)^n - (\alpha - i\beta)^n],$$

und mit Einführung der Funktionen Q und R:

$$\prod_{p=1}^{p=n} r_p^2 = (T^2 + U^2)^n - C^n Q + C^{2n}.$$

Durch analoge Rechnung wird gefunden:

$$\prod_{p=1}^{p=n} r'^2_p = (T^2 + U^2)^n - C^n(AQ - BR) + C^{2n}(A^2 + B^2).$$

Demnach lautet die Gleichung der Niveaulinien:

$$\frac{(T^2 + U^2)^n - C^n Q + C^{2n}}{(T^2 + U^2)^n - C^n(AQ - BR) + C^{2n}(A^2 + B^2)} = \sigma^2,$$

oder nach kurzer Umformung:

$$(T^2 + U^2)^n - C^n \frac{A\sigma^2 - 1}{\sigma^2 - 1} Q + C^n \frac{B\sigma^2}{\sigma^2 - 1} R = C^{2n} \frac{1 - (A^2 + B^2)\sigma^2}{\sigma^2 - 1}.$$

Diese Gleichung ist für $\sigma = e^{xt}$ identisch mit der Gleichung 15) der Kassinoidenschar und somit ist die Behauptung, dass die Niveaulinien die Kassinoiden einer Schar sind, bewiesen. Für diese Kurven

selbst aber resultiert aus dem vorstehenden der Satz, welcher eine Definition in sich schliesst:

Bezeichnen r_p und r'_p die Abstände eines beliebigen variabeln Punktes T, U von $2n$ festen Punkten, welche zu je n die Ecken zweier regulärer konzentrischer Polygone bilden, so ist der geometrische Ort aller Punkte T, U, für welche der Quotient aus den Produkten der je n Radienvektoren nach den beiden Punktgruppen konstant ist, d h.:

$$19) \qquad \frac{\prod_{p=1}^{p=n} r_p}{\prod_{p=1}^{p=n} r'_p} = \sigma = const$$

eine Kassinoide n^{ter} Ordnung. Für $\sigma = 0$ bis $\sigma = \infty$ ergiebt sich eine Kurvenschar.

Es würde sich in zweiter Reihe um Ableitung der Gleichung der zu den Niveaulinien orthogonalen Strömungskurven handeln.* Nun war aber bereits bewiesen, dass die orthogonalen Trajektorien einer Kassinoidenschar die Kassinoiden eines Büschels bilden, und es ist daher von vorherein einleuchtend, dass die Strömungslinien in unserem Problem der stationären Strömung mit den Kurven 16) identisch sein werden, sobald die Gleichung 15) die Kurven konstanten Potentials repräsentiert.

Auf funktionentheoretischem Wege ist nun leicht der Satz zu beweisen**: „Sind $\frac{\prod_{p=1}^{p=n} r_p}{\prod_{p=1}^{p=n} r'_p} = const$ die oben definierten Kurven konstanten Potentials, so sind die dazu orthogonalen Strömungslinien definiert durch die Gleichung:

$$20) \qquad \sum_{p=1}^{p=n} \vartheta_p - \sum_{p=1}^{p=n} \chi_p = const = \tau,$$

wo mit ϑ_p und χ_p die Winkel bezeichnet sind, welche die Radienvektoren eines Punktes T, U der Kurve nach den je n Elektroden der ersten und zweiten Gruppe mit der positiven T-Axe bilden."

---

* s. Hildebrandt, Diss. Daselbst ist das allgemeine Verfahren, das bei solcher Ableitung einzuschlagen ist, angegeben; wir beschränken uns auf die obigen Andeutungen.

** s. Hildebrandt, S. 7, sowie S. 9 flg.

Wir zeigen im folgenden, dass die so definierten Kurven identisch mit den Kassinoiden unseres Büchels sind. — Nach der Definition von ϑ_p und χ_p ist

$$\vartheta_p = arctan\,\frac{U-\beta_p}{T-\alpha_p}, \qquad \chi_p = arctan\,\frac{U-\beta'_p}{T-\alpha'_p},$$

oder, wenn wir für *arctan* den Logarithmus einführen:

$$\vartheta_p = \frac{1}{2i}\,log\,\frac{T+iU-(\alpha_p+i\beta_p)}{T-iU-(\alpha_p-i\beta_p)},$$

somit:

$$\sum_{p=1}^{p=n}\vartheta_p = \frac{1}{2i}\,log\prod_{p=1}^{p=n}\frac{T+iU-(\alpha_p+i\beta_p)}{T-iU-(\alpha_p-i\beta_p)}$$

und mit Berücksichtigung von Gleichung 18):

$$\sum_{p=1}^{p=n}\vartheta_p = \frac{1}{2i}\,log\,\frac{(T+iU)^n-C^n}{(T-iU)^n-C^n}.$$

Durch analoge Rechnung ergiebt sich für die andere Winkelsumme:

$$\sum_{p=1}^{p=n}\chi_p = \frac{1}{2i}\,log\,\frac{(T+iU)^n-C^n(A+iB)}{(T-iU)^n-C^n(A-iB)}.$$

Die Gleichung 20) erhält dann die Form:

$$\sum_{p=1}^{p=n}\vartheta_p-\sum_{p=1}^{p=n}\chi_p=\tau=$$

$$\frac{1}{2i}\,log\,\frac{(T^2+U^2)^n-\frac{C^n}{2}(1+A-iB)\,Q-\frac{C^n}{2}(i[1-A]-B)\,R+C^{2n}(A-iB)}{(T^2+U^2)^n-\frac{C^n}{2}(1+A+iB)Q-\frac{C^n}{2}(-i[1-A]-B)R+C^{2n}(A+iB)}.$$

Setzen wir $cot\,\tau=\frac{1}{\varepsilon}$, wo ε eine neue Konstante ist, so dass

$$\tau=\frac{1}{2i}\,log\,\frac{1+\varepsilon i}{1-\varepsilon i},$$

so ergiebt sich nach kurzer Rechnung als Gleichung der durch 20) definierten Kurven:

$$(T^2+U^2)^n-\frac{C^n}{2}(1+A+B\,cot\,\tau)\,Q+\frac{C^n}{2}(B-[A-1]\,cot\,\tau)\,R$$
$$=-C^{2n}(A+B\,cot\,\tau).$$

Dies ist aber, wie behauptet, die Gleichung einer Kassinoide n^{ter} Ordnung, welche mit 16) identisch wird, wenn $\tau=\varkappa u\pm p\pi$ ist. Damit ist der oben aufgestellte Satz bewiesen. — Wir haben hiermit ferner auch für die Kassinoiden des Büschels eine neue Definition erhalten, die sich so aussprechen lässt:

Verbindet man einen Punkt T, U der Ebene mit den je n Ecken zweier regulärer konzentrischer Polygone, und nennt die Winkel dieser Verbindungslinien mit der positiven T-Axe ϑ_p resp. χ_p, so ist der geometrische Ort aller Punkte, für welche $\sum_{p=1}^{p=n} \vartheta_p - \sum_{p=1}^{p=n} \chi_p$ konstant ist, eine Kassinoide n^{ter} Ordnung, welche durch die $2n$ Punkte hindurchgeht.

Geben wir dieser Konstanten den Wert $\varkappa u \pm p\pi$, so erhalten wir gerade das Kurvenbüschel, in welches die Geraden $u = const$ der t, u-Ebene auf die T, U-Ebene mittelst der früher diskutierten Funktion abgebildet wurden.

Es sei überdies bemerkt, dass mit Zuhilfenahme des folgenden u. a. von Kirchhoff* bewiesenen Satzes die vorstehenden Betrachtungen sich weit einfacher gestalten lassen. Dieser Satz lautet: „Jede konforme Abbildung eines in einer Fläche befindlichen Strömungsnetzes auf eine andere Fläche liefert in dieser letzteren wieder eine mögliche Strömung der Elektrizität“. Nun sind die Geraden $t = const$ und $u = const$ der t, u-Ebene Niveaulinien und Strömungskurven, wenn die beiden unendlich fernen Punkte $u = u$, $t = +\infty$ und $u = u$, $t = -\infty$ als Elektroden betrachtet werden. Bei konformer Abbildung dieser Geraden in konzentrische Kassinoiden n^{ter} Ordnung mittelst der von uns gefundenen abbildenden Funktion entsprechen jeder der beiden Elektroden n der T, U-Ebene und das Strömungsnetz ist demnach das von uns noch weiter zu betrachtende System von Kassinoiden. Hiermit aber ist der in der Einleitung angezeigte Zusammenhang der beiden Probleme 1) und 2) konformer Abbildung deutlich.

Mit Zuhilfenahme des obigen Kirchhoffschen Satzes lassen sich ferner mögliche Strömungsnetze auf anderen Flächen angeben, z. B. auf der Kugel, dem Kegel u. s. w., wenn die T, U-Ebene konform auf diese Flächen abgebildet wird. Überträgt man mittelst stereographischer Projektion die Kassinoiden auf eine Kugel, welche die T, U-Ebene im Koordinatenanfang berührt, indem man den Antipodenpunkt als Centrum der Projektion wählt, so resultiert die durch Fig. 2 angedeutete Verteilung der Elektrizität auf der Kugel, und wir haben das Resultat: Strömt in eine metallische Kugelschale in n auf einem Kreise in gleichem Abstande voneinander liegenden Punkten Elektrizität ein, in n auf einem andern Kreise, dessen Ebene

* s. Kirchhoff: „Über die stationäre elektrische Strömung in gekrümmten leitenden Flächen“. Berl. Monatsberichte, 1875.

der des vorigen parallel ist, in gleichem Abstande voneinander gelegenen Punkten ebensoviel Elektrizität aus, dann sind die isoelektrischen Kurven auf der Kugel die durch passende stereographische Projektion der Kassinoiden n^{ter} Ordnung in der Ebene zu erhaltenen Kurven. Es bietet keinerlei Schwierigkeit, die Strömungen auf der Kugel für alle die Fälle zu verfolgen, in denen die Elektroden spezielle Lage haben, wenn die später vorzuführenden Spezialfälle der konformen Abbildung in Betracht gezogen werden.* (s. Fig. 3, welche dem Spezialfall III entspricht.)

§ 4.

Der allgemeine Fall der Abbildung.

Wir unterziehen im folgenden den Zusammenhang von Figur- und Bildebene auf Grund der Gleichungen 15) und 16) der Kassinoiden einer eingehenden Diskussion, indem wir zunächst von der Periodizität der Funktion e^{xiu} absehen, und somit nur einen Streifen der t, u-Ebene auf die T, U-Ebene abbilden, welcher von $u = -\frac{\pi}{\varkappa}$ bis $u = \frac{\pi}{\varkappa}$ gerechnet sein mag. Den Geraden $t = const$ und $u = const$ entsprechen die Kassinoiden 15) resp. 16), für deren Parameter q, r, Λ sich durch Vergleichung mit Gleichung 3) die Werte ergeben:

$$21) \quad \begin{cases} q_t = 2C^n \dfrac{Ae^{2\varkappa t} - 1}{e^{2\varkappa t} - 1}; & q_u = C^n (B \cot \varkappa u + A + 1); \\ r_t = -2C^n \dfrac{Be^{2\varkappa t}}{e^{2\varkappa t} - 1}; & r_u = -C^n (B - [A-1] \cot \varkappa u); \\ \Lambda_t = C^{2n} \dfrac{1 - (A^2 + B^2) e^{2\varkappa t}}{e^{2\varkappa t} - 1}; & \Lambda_u = -C^{2n} (A + B \cot \varkappa u). \end{cases}$$

Nach den in § 1 gemachten Bemerkungen hängt die verschiedene Form der Kassinoiden desselben Systems wesentlich von dem Werte des Parameters Λ ab. Zunächst ergab sich die in jedem System vorkommende exzeptionelle Kurve, die Hyperbel n^{ter} Ordnung, wenn die drei Parameter gleichzeitig in geeigneter Weise unendlich wurden. Wir finden leicht: Den Koordinatenaxen $t = 0$ und $u = 0$ der

* H. Hildebrandt giebt in der bereits zitierten Dissertation zwei Spezialfälle für die Verteilung der Elektrizität auf der Kugel (s. Tafel II, Fig. 19 und 20), jedoch nicht den allgemeinen Fall, auf welchen nur im Text hingedeutet wird. Daselbst finden sich ferner S. 15—17 die Gleichungen der Strömungs- und Niveaulinien auf der Kugelschale, sowie in der Einleitung eine reiche Litteraturangabe.

t, u-Ebene entsprechen in der T, U-Ebene die beiden Hyperbeln:*

$$22) \quad \begin{cases} (1-A)\,Q + BR = C^n(1-A^2-B^2), \\ BQ - (1-A)\,R = 2C^nB. \end{cases}$$

Da jedem Punkte der t, u-Ebene, wie aus der Form der abbildenden Funktion folgt, n Punkte der T, U-Ebene entsprechen, welche die Ecken eines regulären Polygons mit dem Koordinatenanfang als Mittelpunkt bilden, und die beiden Axen $t = 0$ und $u = 0$ sich nur in einem Punkte $t \equiv u \equiv 0$ kreuzen, so ist einleuchtend, dass je ein Ast der einen Hyperbel je einen Ast der andern Hyperbel in dem einen Punkte schneidet, welcher dem Koordinatenanfang $t = u = 0$ entspricht. — Für die beiden Hyperbeln gilt nun der Satz:

„Die Hyperbel der Kassinoidenschar ist der geometrische Ort der Brennpunkte der Kurven des Kassinoidenbüschels, und die Hyperbel des letzteren ist der geometrische Ort der Brennpunkte der Kurven der Schar." **Beweis:** Die Brennpunktskoordinaten der Kassinoiden der Schar sind charakterisiert durch die beiden Parameter q_t und r_t, in denen die bisher festen Koordinaten a, b nun als laufende zu betrachten sind. Die Elimination von $e^{2\varkappa t}$ aus

$$q_t = 2C^n \frac{Ae^{2\varkappa t}-1}{e^{2\varkappa t}-1} \quad \text{und} \quad r_t = -2C^n \frac{Be^{2\varkappa t}}{e^{2\varkappa t}-1}$$

ergiebt alsdann eine Gleichung zwischen q_t und r_t, nämlich den gesuchten geometrischen Ort der Brennpunkte der Kassinoiden der Schar:

$$Bq_t - (1-A)\,r_t = 2C^n.\,B.$$

Bezeichnen wir nun die laufenden Koordinaten mit T, U, und berücksichtigen, dass nach den Definitionsgleichungen (S. 8) $q\,(T, U) \equiv Q$, $r\,(T, U) \equiv R$, so ergiebt sich schliesslich die Gleichung:

$$BQ - (1-A)\,R = 2C^n.\,B,$$

d. h. die Hyperbel des Büschels, w. z. b. w. Der zweite Teil des Satzes wird ebenso verifiziert.

Wir nehmen nun im folgenden stets an, dass $A^2 + B^2 < 1$ sei. Diese völlig willkürliche Annahme sagt nichts weiter aus, als dass die dem Punkte $u = u$, $t = +\infty$ entsprechenden Büschelpunkte der T, U-Ebene die Ecken eines Polygons bilden, das innerhalb des Polygons der andern Gruppe von Büschelpunkten liegt. Es wird hierdurch die Abbildung keineswegs spezialisiert.

---

* Die Epitheta „regulär" und „n^{ter} Ordnung" sind im folgenden der Kürze halber weggelassen.

Für die Kassinoiden der Schar ist nun:

$$\Lambda_t = C^{2n} \frac{1 - (A^2 + B^2) e^{2\varkappa t}}{e^{2\varkappa t} - 1},$$

und wir haben einzügige Kassinoiden, die Lemniskate, oder n-zügige Kassinoiden, jenachdem $\Lambda_t \gtrless 0$ ist. Da nun Λ_t nur für einen Wert $t = t'$ verschwindet, nämlich für die eine reelle Wurzel der Gleichung

$$1 - (A^2 + B^2) e^{2\varkappa t} = 0, \quad \text{d. h.} \quad t' = -\frac{1}{2\varkappa} log (A^2 + B^2),$$

(wo also t' infolge der obigen Annahme über $A^2 + B^2$ positiv ist), so entspricht nur einer Geraden $t = t'$ in der t, u-Ebene die Lemniskate der Kassinoidenschar, und diese Lemniskate trennt die ein- und n-zügigen Kassinoiden ebenso wie die Hyperbel. Im ganzen giebt das folgende Schema Aufschluss:

$t = -\infty$ ergiebt die eine Gruppe von n Büschelpunkten,

$-\infty < t < 0$; es ist $\Lambda_t < 0$. Dies ergiebt n-zügige Kassinoiden, welche sich um jene n Punkte als ihrer Grenze herumschlingen.

$t = 0$; „ „ $\Lambda_t = \infty$; dies ergiebt die Hyperbel,

$0 < t < t'$; „ „ $\Lambda_t > 0$; „ „ einzügige Kassinoiden,

$t = t'$; „ „ $\Lambda_t = 0$; „ „ die Lemniskate,

$t' < t < \infty$; „ „ $\Lambda_t < 0$; „ „ n-zügige Kassinoiden, welche sich um die folgenden n Büschelpunkte als ihrer Grenze herumschlingen,

$t = \infty$ ergiebt die zweite Gruppe von n Büschelpunkten.

Für die Kurven des Büschels ist:

$$\Lambda_u = -C^{2n}(A + B \cot \varkappa u),$$

und wir haben somit das Resultat: die Kassinoiden des Büschels sind einzügig, werden zur Lemniskate, oder sind n-zügig, jenachdem $A + B \cot \varkappa u \lessgtr 0$ ist. Nun ist aber noch zu berücksichtigen, dass wegen der Periodizität der Cotangente unendlich vielen Geraden $u = const$ dieselbe Kurve in der T, U-Ebene entspricht. Wollen wir jede Kurve nur einmal haben, so dürfen wir, wie dies bereits besprochen, u nur Werte zwischen $-\frac{\pi}{\varkappa}$ und $+\frac{\pi}{\varkappa}$ zuschreiben. Doch sei schon hier bemerkt, dass einer bestimmten Geraden $u = const$ nur ein Teil einer Kassinoide zugehört, wodurch es sich z. B. erklärt, dass zwei verschiedenen Geraden, welche dem zu betrachtenden Elementarstreifen

der t, u-Ebene angehören, dieselbe Lemniskate entspricht. Es ist einleuchtend, dass die Grösse $A + B \cot \varkappa u$ innerhalb des Intervalles $-\frac{\pi}{\varkappa} < u < \frac{\pi}{\varkappa}$ für zwei Werte u' und u'' verschwindet, sodass $u'' = u' + \frac{\pi}{\varkappa}$, und von denen u' zwischen $-\frac{\pi}{2\varkappa}$ und 0, u'' zwischen $\frac{\pi}{2\varkappa}$ und $\frac{\pi}{\varkappa}$ liegt, da $u = \frac{1}{\varkappa} arc\left(cot = -\frac{A}{B}\right)$ innerhalb des besprochenen Intervalles zweideutig ist. Hieraus ergiebt sich: Den Geraden $u = u'$ und $u = u''$ entspricht die Lemniskate des Kassinoidenbüschels. Im übrigen zeigt das folgende Schema, wie sich die Werte von Λ_u und infolgedessen der Charakter der Kassinoiden bei variablem u ändern.

$u = -\frac{\pi}{\varkappa}$;	es ist	$\Lambda_u = \infty$,	dies ergiebt:	die Hyperbel,
$-\frac{\pi}{\varkappa} < u < u'$;	„ „	$\Lambda_u < 0$,	„ „	n-zügige Kassinoiden,
$u = u'$;	„ „	$\Lambda_u = 0$,	„ „	die Lemniskate,
$u' < u < 0$,	„ „	$\Lambda_u > 0$,	„ „	einzügige Kassinoiden,
$u = 0$,	„ „	$\Lambda_u = \infty$,	„ „	die Hyperbel,
$0 < u < u''$,	„ „	$\Lambda_u < 0$,	„ „	n-zügige Kassinoiden,
$u = u''$,	„ „	$\Lambda_u = 0$,	„ „	die Lemniskate,
$u'' < u < \frac{\pi}{\varkappa}$,	„ „	$\Lambda_u > 0$,	„ „	einzügige Kassinoiden,
$u = \frac{\pi}{\varkappa}$,	„ „	$\Lambda_u = \infty$,	„ „	die Hyperbel.

Der letztere Wert, $u = \frac{\pi}{\varkappa}$, wird schon dem nächsten Streifen zuzurechnen sein. Die Grenze zwischen den ein- und n-zügigen Kassinoiden wird teils von den Ästen der Hyperbel, teils von Zweigen der Lemniskate gebildet. Wir erhalten in Summa das Bild der T, U-Ebene, wie es Fig. 1 andeutet. Vergl. hierzu ferner Fig. 4a, 4b und 6a, 6b.

Der Vollständigkeit wegen seien schliesslich noch die Koordinaten T, U eines beliebigen Punktes der Bildebene explizite durch die Koordinaten seines entsprechenden Punktes in der t, u-Ebene ausgedrückt, desgleichen die Koordinaten der Brenn- und Büschelpunkte, sowie die als Abbildungsmodul bezeichnete Funktion $p(t, u)$ berechnet. Bezeichnen wir den reellen Teil des Radikanden der Wurzel in Gleichung 18) mit ξ, den von i befreiten imaginären Teil mit η, dass also $T + iU = C\sqrt[n]{\xi + i\eta}$, so ist:

$$23) \quad \begin{cases} \xi = \dfrac{1 + [(A+1)\cos \varkappa u - B \sin \varkappa u]\, e^{\varkappa t} + A e^{2\varkappa t}}{1 + 2\, e^{\varkappa t} \cos \varkappa u + e^{2\varkappa t}}, \\ \eta = \dfrac{[(A-1)\sin \varkappa u + B \cos \varkappa u]\, e^{\varkappa t} + B e^{2\varkappa t}}{1 + 2 e^{\varkappa t} \cos \varkappa u + e^{2\varkappa t}}, \end{cases}$$

Da nun bekanntlich:

$$\sqrt[n]{\xi + i\eta} = \sqrt[2n]{\xi^2 + \eta^2} \left[\cos \frac{\arctan \frac{\eta}{\xi} + 2p\pi}{n} + i \sin \frac{\arctan \frac{\eta}{\xi} + 2p\pi}{n} \right],$$

wo $p = 0, 1, 2 \ldots n-1$ zu setzen ist, und unter $\sqrt[2n]{\xi^2 + \eta^2}$ die positive Wurzel verstanden wird, so ergeben sich für T und U explizite die Werte:

$$24) \quad \begin{matrix} T \\ U \end{matrix} = C \sqrt[2n]{\xi^2 + \eta^2} \cdot \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \frac{\arctan \frac{\eta}{\xi} + 2p\pi}{n}; \quad n = 0, 1 \ldots n-1.$$

Die dem Koordinatenanfange $t = 0$, $u = 0$ entsprechenden Punkte T_0, U_0 ergeben sich durch Einführung von $t = u = 0$ in Gleichung 24). Hier wird dann $\xi = \dfrac{A+1}{2}$, $\eta = \dfrac{B}{2}$, so dass

$$\begin{matrix} T_0 \\ U_0 \end{matrix} = C \sqrt[2n]{\frac{(A+1)^2 + B^2}{4}} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \frac{\arctan \frac{B}{A+1} + 2p\pi}{n}.$$

Im allgemeinen Falle entsprechen sich die Koordinatenanfänge in beiden Ebenen nicht, dies trifft nur zu in dem Spezialfalle, wo $B = 0$, $A = -1$ wird.

Die Koordinaten der $2n$ Büschelpunkte der T, U-Ebene ergeben sich durch die Substitutionen $u = u$, $t = -\infty$, resp. $u = u$, $t = +\infty$ in Gleichung 24). Es kommt:

$$\begin{matrix} T \\ U \end{matrix} = C \cdot \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \frac{2\pi p}{n}, \quad p = 0, 1 \ldots n-1,$$

resp.

$$\begin{matrix} T \\ U \end{matrix} = C \sqrt[2n]{A^2 + B^2} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \frac{\arctan \frac{B}{A} + 2p\pi}{n}; \quad p = 0, 1 \ldots n-1.$$

Um die Koordinaten der Brennpunkte der Kassinoiden zu bestimmen, gehen wir zurück auf die Formel:

$$a_p + i b_p = \sqrt[n]{\frac{q - ir}{2}}.$$

Für die Kurven, welche den Parallelen $t = const$ entsprechen, haben wir also:

$$a_p + ib_p = C \sqrt[n]{\frac{Ae^{2\varkappa t} - 1}{e^{2\varkappa t} - 1}} + i \frac{Be^{2\varkappa t}}{e^{2\varkappa t} - 1}$$

und erhalten somit in bekannter Weise:

$$\begin{matrix} a_p \\ b_p \end{matrix} = C \sqrt[2n]{\frac{(A^2 + B^2)e^{4\varkappa t} - 2Ae^{2\varkappa t} + 1}{(e^{2\varkappa t} - 1)^2}} \cdot \begin{matrix} cos \\ sin \end{matrix} \frac{arctan \dfrac{Be^{2\varkappa t}}{Ae^{2\varkappa t} - 1} + 2p\pi}{n}.$$

Die Koordinaten der Brennpunkte der Hyperbel ergeben sich hieraus, wenn wir $t = 0$ setzen. Wir erhalten $a_p = b_p = \infty$, d. h.:

„Jede Hyperbel n^{ter} Ordnung ist eine exzeptionelle Kassinoide n^{ter} Ordnung, deren Brennpunkte ins unendlich Weite gerückt sind, und kann sowohl als Grenzfall einer einzügigen, als einer n-zügigen Kassinoide betrachtet werden, da für $t > 0$ sich die ersteren, für $t < 0$ die letzteren ergeben.“

Für die Kassinoiden des Büschels war $q_u = C^n (B \cot \varkappa u + A + 1)$ und $r_u = - C^n (B - [A - 1] \cot \varkappa u)$ gefunden. Für die Brennpunkte ergiebt sich alsdann durch dieselbe Rechnung wie oben:

$$\begin{matrix} a_p \\ b_p \end{matrix} = C \sqrt[2n]{\tfrac{1}{4} \{(B^2 + [A-1]^2) \cot^2 \varkappa u + 4B \cot \varkappa u + (A+1)^2 + B^2\}} \cdot$$

$$\cdot \begin{matrix} cos \\ sin \end{matrix} \frac{arctan \dfrac{B - (A-1) \cot \varkappa u}{B \cot \varkappa u + A + 1} + 2p\pi}{n}; \quad p = 0, 1 \ldots n-1.$$

Für die Parameter λ^{2n} der Kassinoiden in der ursprünglichen Form $r_1^2 r_2^2 \ldots r_n^2 = \lambda^{2n}$ ergeben sich mittelst leicht durchzuführender Rechnung die Werte:

$$\lambda_t^{2n} = \frac{C^{2n} [B^2 + (1 - A)^2]}{\left(e^{\varkappa t} - \dfrac{1}{e^{\varkappa t}}\right)}, \quad \lambda_u^{2n} = \frac{C^{2n} [B^2 + (1 - A)^2]}{4 \sin^2 \varkappa u}.$$

Für die in der Einleitung erwähnte Funktion der Stelle $p = p(t, u)$, welche das Vergrösserungsverhältnis entsprechender unendlich kleiner Linienelemente in Figur- und Bildebene angiebt, hatten wir als Definitionsgleichung $dS = p \,.\, ds$, oder

$$dT^2 + dU^2 = p^2 (dt^2 + du^2).$$

Nun ist:

$$T + iU = f(t + iu), \quad \text{also} \quad dT \pm i\,dU = f'(t \pm iu) \,.\, (dt \pm i\,du),$$

und es resultiert somit durch Vergleichung der aus letzterer Relation gefundenen neuen Gleichung

$$dT^2 + dU^2 = f'(t + iu) \,.\, f'(t - iu) \,.\, (dt^2 + du^2)$$

mit der Definitionsgleichung zur Berechnung von p^2 die Formel:

$$p^2 = f'(t + iu) \,.\, f'(t - iu).$$

Die Ausführung der Rechnung bietet keinerlei wesentliche Schwierigkeit und geben wir hier nur das Resultat:

$$p = \frac{\frac{C\varkappa}{n}\sqrt{(A-1)^2+B^2}\,.\,e^{\varkappa t}}{\sqrt[2n]{\{1+2e^{\varkappa t}\cos\varkappa u+e^{2\varkappa t}\}^{n+1}.\{1+2e^{\varkappa t}(A\cos\varkappa u-B\sin\varkappa u)+(A^2+B^2)e^{2\varkappa t}\}^{n-1}}}.$$

Für $t = \pm\infty$ wird $p = 0$, d. h. in den $2n$ Büschelpunkten ist die Konformität der Abbildung gestört. Dasselbe gilt natürlich für den unendlich fernen Punkt der T, U-Ebene, für welchen nach Gleichung 24) $\xi = \eta = \infty$, also nach 23) $1 + 2e^{\varkappa t}\cos\varkappa u + e^{2\varkappa t} = 0$ wird. Dann ist aber $p = \infty$.

§ 5.

Die Mehrdeutigkeit der Abbildung; die Riemannsche Fläche.

Wir haben bisher nur einen Streifen der t, u-Ebene, parallel der t-Axe, zwischen $u = -\frac{\pi}{\varkappa}$ und $u = \frac{\pi}{\varkappa}$ auf die T, U-Ebene abgebildet. Da jedoch allgemein:

$$e^{\varkappa\left(t+iu+\frac{2pi\pi}{\varkappa}\right)} = e^{\varkappa(t+iu)}; \quad p = 0, 1, 2 \ldots (\infty)$$

ist, so wird die t, u-Ebene aus unendlich vielen solchen Streifen von der Breite $\frac{2\pi}{\varkappa}$ bestehen, von denen jeder auf die T, U-Ebene abgebildet wird. Wollen wir Eindeutigkeit herstellen, so dass einem beliebigen Punkte der T, U-Ebene ein, und nur ein Punkt der t, u-Ebene entspreche, so müssen wir zuvörderst die T, U-Ebene von unendlich vielen Blättern überdeckt denken, so dass jedem Streifen der t, u-Ebene ein bestimmtes dieser Blätter zugeteilt wird.

Da ferner einem Punkte $t + iu$ n verschiedene Punkte $T + iU$ entsprechen, was von der n-Deutigkeit der Wurzel herrührt, also ein Streifen n-mal auf ein Blatt der T, U-Ebene abgebildet ist, so müssen wir, um auch in dieser Hinsicht Eindeutigkeit herzustellen, die t, u-Ebene von n Blättern überdeckt denken, und jedem dieser Blätter einen bestimmten n^{ten} Teil der T, U-Ebene zuordnen.

Zur Abkürzung setzen wir im folgenden stets $T + iU = w$, $t + iu = z$. Ferner definieren wir: Fallen für einen bestimmten Wert der Funktion wv der entsprechenden Werte von z zusammen, so soll dieser Punkt der w-Ebene ein Verzweigungspunkt (Windungspunkt) von der Multiplizität $v - 1$ heissen. Der entsprechende Punkt

der z-Ebene werde Kreuzungspunkt genannt*. (Analog ist ein Verzweigungspunkt der z-Ebene definiert.) Die Verzweigungspunkte der w-Ebene sind diejenigen, in denen die Blätter derselben zusammenhängen. Ein solcher Punkt von der Multiplizität $\nu - 1$ ist nun dadurch charakterisiert, dass für ihn

$$\frac{dw}{dz} = 0, \quad \frac{d^2w}{dz^2} = 0, \quad \cdots \quad \frac{d^{\nu-1}w}{dz^{\nu-1}} = 0, \quad \frac{d^\nu w}{dz^\nu} \gtrless 0$$

ist. Derselbe ist von der Konformität ausgeschlossen, denn einem Winkel von der Grösse φ, welchen zwei von demselben ausgehende Kurvenstücke einschliessen, entspricht in dem zugeordneten Punkte z ein Winkel von der Grösse $\frac{\varphi}{\nu}$. Einem Kurvenstücke, welches einfach durch diesen Punkt w hindurchgeht, entsprechen ν Kurvenstücke, welche sich im entsprechenden Punkte z unter gleichen Winkeln $\frac{180^0}{\nu}$ überkreuzen. (Daher der Name Kreuzungspunkt.)

Wir suchen nun die Windungspunkte der w-Ebene, resp. die Kreuzungspunkte der z-Ebene. Letztere ergeben sich aus $\frac{dw}{dz} = 0$, oder, falls für den betreffenden Wert $z = z_0$ $w = 0$ ist, aus $\frac{dw^n}{dz} = 0$. Dies ergiebt in unserm Falle, bis auf einen wegzulassenden konstanten Faktor:

$$\frac{e^{\varkappa z}}{(1 + e^{\varkappa z})^2} = 0,$$

welche Gleichung durch $z = \infty$ und $z = -\infty$ befriedigt wird. Also: Die Punkte $z = \infty$ und $z = -\infty$ sind Kreuzungspunkte der z-Ebene, und die ihnen entsprechenden Punkte $w = C\sqrt[n]{A + iB}$, $w = C\sqrt[n]{1}$ sind Verzweigungspunkte der w-Ebene. Um die Multiplizität der letztgenannten Punkte zu erkennen, untersuchen wir, wie oben angegeben, die höheren Differentialquotienten. Diese sind sämtlich von der Form

$$\frac{d^\nu(w^n)}{dz^\nu} = \frac{\sum_{\iota=1}^{\iota=\nu} \gamma_\iota e^{(2\iota-1)\varkappa z}}{(1 + e^{\varkappa z})^{2\nu}}; \qquad \nu = 1, 2, 3 \ldots \nu,$$

wo die γ_ι reelle, ganze Zahlen sind und $\gamma_\nu = 0$. Für $z = -\infty$ und $z = \infty$ verschwinden diese Differentialquotienten bis $\nu = \infty$ und wir haben somit das Resultat:

* s. F. Klein: „Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale". Leipzig 1882.

Die Punkte $w = C\sqrt[n]{1}$ und $w = C\sqrt[n]{A + iB}$ sind Verzweigungspunkte von der Multiplizität ∞. Daselbst hängen die unendlich vielen Blätter der w-Ebene zusammen.

Wir verbinden nun je einen Punkt der ersten Punktgruppe mit demjenigen der zweiten Punktgruppe, welcher der entsprechenden n^{ten} Wurzel zugehört, durch einen sogenannten Verzweigungsschnitt. Längs dieser n Verzweigungsschnitte hängt das erste Blatt des Cyklus zusammen mit dem zweiten, das zweite mit dem dritten u. s. w. Einem Überschreiten eines solchen Verzweigungsschnittes entspricht der Durchgang durch eine der Geraden, welche die unendlich vielen Streifen der t, u-Ebene voneinander trennen, z. B. $u = \pm \frac{\pi}{\varkappa}$, u. s. w. — Da die Gerade $u = \pm \frac{\pi}{\varkappa}$ den Punkt $t = 0$, $u = \pm \frac{\pi}{\varkappa}$ enthält, so geht die entsprechende Kurve in der T, U-Ebene (Hyperbel) durch den ∞ fernen Punkt, und wir legen daher die Verzweigungsschnitte von den Punkten $w = C\sqrt[n]{1}$ längs der Hyperbel des Büschels durch den unendlich fernen Punkt nach den Punkten $w = C\sqrt[n]{A + iB}$ (s. Fig. 4a).

Wir suchen nun ferner die Kreuzungspunkte der w-Ebene und damit die Verzweigungspunkte der z-Ebene, welche durch alle diejenigen w bestimmt sind, die der Gleichung $\frac{dz}{dw} = 0$ genügen. Da nun

$$e^{\varkappa z} = \frac{C^n - w^n}{w^n - C^n(A + iB)},$$

so ist:

$$\frac{dz}{dw} = \frac{-n \cdot w^{n-1}}{\varkappa (C^n - w^n)[w^n - C^n(A + iB)]}.$$

Dies verschwindet aber für $w = 0$ und $w = \infty$, d. h. die Verzweigungspunkte der z-Ebene sind durch die Wurzeln der Gleichungen

$$\frac{1 + (A + iB)\, e^{\varkappa (t + iu)}}{1 + e^{\varkappa (t + iu)}} = \frac{0}{\infty}$$

bestimmt. Aus der ersten Gleichung folgt:

$$25) \qquad e^{\varkappa t} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cot \varkappa \left(u \pm p \cdot \frac{2\pi}{\varkappa} \right) = -\frac{A}{B}; \quad p = 0, 1 \ldots (\infty).$$

Aus der zweiten Gleichung resultiert:

$$26) \qquad t = 0, \quad u = (\pm 2p \pm 1) \frac{\pi}{\varkappa}; \qquad p = 0, 1 \ldots (\infty),$$

und wir haben somit das Resultat: Innerhalb jedes Streifens der t, u-Ebene liegen zwei Verzweigungspunkte, deren Koordi-

naten durch 25) und 26) bestimmt sind. Wir rechnen zum Elementarstreifen zwischen $u = -\frac{\pi}{\varkappa}$ und $u = \frac{\pi}{\varkappa}$ die Verzweigungspunkte

$$e^{\varkappa t} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cot \varkappa u = -\frac{A}{B}, \quad \left(\frac{\pi}{2} < \varkappa u < \pi\right) \text{ und } t = 0, \quad u = \frac{\pi}{\varkappa}.$$

Um die Multiplizität dieser Verzweigungspunkte zu erkennen, untersuchen wir die höheren Differentialquotienten. Da für die unter 25) und 26) angegebenen Werte $e^{\varkappa z} = 0$ ist, so verschwindet mit $\frac{dz}{dw}$ auch $\frac{de^{\varkappa z}}{dw}$, und wir brauchen, um die Multiplizität zu finden, nur die Differentialquotienten von $e^{\varkappa z}$ zu untersuchen. Es ist nun:

$$e^{\varkappa z} = \frac{\alpha - w^n}{w^n - \beta} = (w^n - \alpha)\left(\frac{1}{\beta} + \frac{w^n}{\beta^2} + \frac{w^{2n}}{\beta^3} + \ldots\right) = (w^n - \alpha) \cdot W,$$

wo α und β Abkürzungen für die Konstanten sind, und W der Wert der Reihe, die in der Nähe von $w = 0$ konvergiert. Bedeuten nun $W', W'' \ldots$ die Differentialquotienten von W nach w und $[\,]$ die Substitution von $w = 0$, so ist, wie leicht ersichtlich, $[W] = \frac{1}{\beta}$, $[W'] = 0$, $[W''] = 0$ u. s. w. Da nun allgemein der ν^{te} Differentialquotient

$$\frac{d^\nu e^{\varkappa z}}{dw^\nu} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-\nu+1)\, w^{n-\nu} \cdot W + \sum_{\iota=1}^{\iota=\nu} \mathfrak{F}_\iota(w) \cdot W^{(\iota)}*$$

ist, so verschwinden für $w = 0$ sämtliche Differentialquotienten bis zum $(n-1)^{\text{ten}}$, während der n^{te} den von Null verschiedenen Wert $\frac{n!}{\beta}$ hat. Es sind also die Punkte 25) der t, u-Ebene Verzweigungspunkte von der Multiplizität $n - 1$.

Um die Differentialquotienten von $e^{\varkappa z}$ nach w für $w = \infty$ zu untersuchen, setzen wir $w^n = \frac{\alpha\beta}{w_1^n}$, wo w_1 von demselben Grade Null wird, wie w unendlich. Es ist dann:

$$e^{\varkappa z} = \frac{\alpha}{\beta}(w_1^n - \beta)\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{w_1^n}{\alpha^2} + \frac{w_1^{2n}}{\alpha^3} + \ldots\right) = \frac{\alpha}{\beta}(w_1^n - \beta) \cdot W_1.$$

Für den ν^{ten} Differentialquotienten gilt allgemein:

$$\frac{d^\nu e^{\varkappa z}}{dw_1^\nu} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot n(n-1)\ldots(n-\nu+1)\, w_1^{n-\nu} \cdot W_1 + \sum_{\iota=1}^{\iota=\nu} \mathfrak{F}_\iota(w_1) \cdot W_1^{(\iota)}.$$

* Die Funktionen $\mathfrak{F}_\iota(w)$ werden für $w = 0$ nicht unendlich.

Da nun für $w_1 = 0$, $[W_1] = \frac{1}{\alpha}$, $[W'_1] = 0 \ldots$, so ist: $\left[\frac{d^{n-1} e^{xz}}{dw_1^{n-1}}\right] = 0$, dagegen:

$$\left[\frac{d^n e^{xz}}{dw_1^n}\right] = \frac{n!}{\beta},$$

d. h.: Auch die Punkte 26) sind Verzweigungspunkte der t, u-Ebene von der Multiplizität $n - 1$. In ihnen hängen die n Blätter in derselben Weise wie im Punkte 25) zusammen. [In Fig. 4b sind die Punkte 26) mit A bezeichnet, die Punkte 25) mit B.] — In jedem Streifen sind die beiden Verzweigungspunkte durch einen Verzweigungsschnitt zu verbinden, längs dessen die n Blätter im Cyklus zusammenhängen, das erste mit dem zweiten, das zweite mit dem dritten u. s. w., schliesslich das n^{te} wieder mit dem ersten, wobei man sich freilich vorstellen muss, dass dieses n^{te} Blatt in das erste durch sämtliche zwischenliegenden zurückkehrt, ohne mit ihnen zusammenzuhängen, d. h. ohne sie zu durchdringen. Wir legen den Verzweigungsschnitt vom Punkte A aus längs der Geraden $xu = \pi$ bis $t = \infty$ und von da zurück längs der Geraden $\cot xu = -\frac{A}{B}$ bis zum Punkte B. Diesem Verzweigungsschnitte entsprechen in der T, U-Ebene n Kurvenäste vom Koordinatenanfang nach den n Büschelpunkten $[+\infty]$* und von hier längs der Verzweigungsschnitte nach dem unendlich fernen Punkt, wodurch die Ebene in n kongruente Gebiete (Sektoren) geteilt wird, die im Koordinatenanfang, sowie im unendlich Weiten in je einem Punkte zusammenstossen. Es ist willkürlich, welches von diesen Gebieten wir einem bestimmten Blatte der t, u-Ebene zuordnen. Dem Passieren eines Verzweigungsschnittes der t, u-Ebene entspricht das Überschreiten eines zwei Gebiete trennenden Kurvenastes. Ehe wir weiter in die Betrachtung entsprechender Wege in den beiden Riemannschen Flächen eintreten, seien folgende, zur Erläuterung des vorhergehenden dienende Bemerkungen angefügt.

Über die Rolle, welche der unendlich ferne Punkt der T, U-Ebene bei unserer Abbildung spielt, informieren wir uns am einfachsten, wenn wir diese Ebene in der bereits früher geschilderten Weise stereographisch auf die Kugel übertragen (Fig. 2). Das unendlich Weite der T, U-Ebene projiziert sich dann in das Projektionszentrum auf der Kugel, und dieser Punkt ist mit seinem Antipodenpunkte, dem Koordinatenanfange, völlig gleichwertig. Wie nämlich die Lemniskaten von Schar

* Diese und ähnliche leicht verständliche Abkürzungen sei im folgenden zu gebrauchen gestattet.

und Büschel sich im Nullpunkte n-fach überkreuzen, so gilt dasselbe im Unendlichkeitspunkte von den je n Ästen der beiden Hyperbeln. Die Projektion der letzteren auf die Kugel giebt zwei im Projektionszentrum sich kreuzende Kurven, die völlig übereinstimmen mit den Projektionskurven der Lemniskaten. Der Unendlichkeitspunkt der T, U-Ebene ist somit in der That als Kreuzungspunkt charakterisiert. Die Verzweigungsschnitte der T, U-Ebene gehen auf der Hyperbel nach dem Unendlichkeitspunkte und von da auf dem je benachbarten Aste ins Endliche zurück, so dass in jenem Punkte sich die Verzweigungsschnitte zu berühren scheinen, sich aber nicht etwa überkreuzen. Der Unendlichkeitspunkt ist kein Windungspunkt. Die beiden Riemannschen Flächen sind jetzt vollkommen eindeutig aufeinander bezogen. Doch erübrigt es noch, auf eine Eigentümlichkeit des Punktes $t + iu = \infty$ zu verweisen, was in einer Anmerkung erledigt sein mag.*

Bei Betrachtung entsprechender Kurven in Figur- und Bildebene haben wir zwischen wirklich geschlossenen und nur scheinbar geschlossenen Wegen zu unterscheiden. Um dies klar zu legen, wollen wir im folgenden längs entsprechender Kurven in beiden Ebenen vorwärts schreiten und untersuchen, ob und nach wievielmaligem Durchmessen der betreffenden Kurve der Ausgangspunkt wieder erreicht wird.

a) Gehen wir auf einem kleinen Ovale um den Windungspunkt B der t, u-Ebene herum, wobei wir uns zunächst im ersten Blatte befinden mögen, so werden wir dementsprechend den Koordinatenanfang der T, U-Ebene in demselben Sinne zu umschreiten haben, und zwar befinden wir uns zunächst im Gebiet I. Bei jedem Umlauf um B gelangen wir in ein neues Blatt der t, u-Ebene und nach n

* Wir wissen, dass zu $Z = 0$ infolge der Gleichung $Z = e^{xz}$ oder $z = log\, Z$ gehört: $z = -\infty$ und zu $Z = \infty$: $z = \infty$. Zu einem beliebigen Werte $Z = a$ gehören jedoch die unendlich vielen Werte $z + 2pi\pi$, wo p beliebig, also auch ∞ werden kann. In diesem Sinne besteht also der Satz: Für alle beliebigen Werte von Z ist $z = \infty$, d. h. der Punkt $z = \infty$ entspricht sämtlichen Punkten Z. Dies giebt auf unsere abbildende Funktion angewandt: Der unendlich ferne Punkt der t, u-Ebene entspricht sämtlichen Punkten der T, U-Ebene! Dies ist geometrisch so zu erklären: Jeder Punkt der T, U-Ebene gehört zu unendlich vielen Blättern, die je einem Streifen der t, u-Ebene entsprechen, also auch zu demjenigen Blatte, welches dem unendlich fernen Streifen der t, u-Ebene entspricht. Da dieser sich aber auf den unendlich fernen Punkt $t + iu = \infty$ zusammenzieht, so gehört umgekehrt dieser Punkt zu jedem Punkte der T, U-Ebene. Indessen haben wir durch Fixierung der Zugehörigkeit von jedem Blatte der T, U-Ebene zu seinem Streifen der t, u-Ebene dieses eigentümliche Vorkommnis eliminiert und die Eindeutigkeit bleibt gewahrt. Den Punkt $t + ui = \infty$ bezeichnet man sonst wegen seiner Eigenschaft, dass in ihm die zugehörige Funktion $T + iU$ alle Werte annehmen kann, als wesentlich singulären Punkt.

Umläufen in das erste Blatt zurück. Der entsprechende Punkt der T, U-Ebene durchschreitet in einer geschlossenen Kurve die n Gebiete und gelangt in das erste Gebiet zurück, ohne einen Verzweigungsschnitt überschritten zu haben, da ja der Punkt t, u immer im ersten Streifen verblieb. Beides sind wirklich geschlossene Wege.

b) In derselben Weise lassen wir einen Punkt t, u den Windungspunkt A auf einem kleinen Ovale w_2 umkreisen. Bei jedem Umlaufe wird der Verzweigungsschnitt v_1 einmal überschritten; der entsprechende Punkt T, U gelangt der Reihe nach in sämtliche Gebiete. Ferner aber verläuft das Oval w_2 abwechselnd im ersten und zweiten (benachbarten) Streifen; der Punkt T, U muss also einen Weg beschreiben, der zwei verschiedenen Blättern der T, U-Fläche angehört, und zwar wird dies dadurch erreicht, dass er jeden Verzweigungsschnitt zweimal überschreitet. Einer Umkreisung von A entspricht nun eine Umkreisung des unendlich fernen Punktes der T, U-Ebene und es ist daher der Weg w_2 in Fig. 4a im entgegengesetzten Sinne zu durchlaufen als in Fig. 4b, so dass also der Koordinatenanfang im umgekehrten Sinne umkreist wird. Diese Regel „jedes Umkreisen des Nullpunktes ist zugleich ein Umkreisen des und endlich fernen Punktes in entgegengesetztem Sinne“ verdeutliche man sich an Fig. 2. Fig. 5a und 5b zeigen den Zusammenhang der Blätter der t, u-Fläche längs des Verzweigungsschnittes an den Stellen, wo derselbe von den Wegen w_1 und w_2 überschritten wird.

c) Verfolgen wir ferner einen Punkt längs einer Geraden w_3 der t, u-Ebene, welche parallel der u-Axe durch sämtliche Streifen läuft. Wir wissen, dass in der T, U-Ebene ihr eine Kassinoide entspricht. Da für w_3 $t < 0$, so wird diese Kassinoide aus n Zügen bestehen, welche um die Büschelpunkte $[-\infty]$ gelagert sind. Die Gerade w_3 überschreitet den Verzweigungsschnitt der t, u-Ebene nicht, bleibt also immer in demselben Blatte. Da wir n Blätter haben, so können wir uns gleichsam n Gerade w_3 übereinander denken, jede in einem andern Blatte verlaufend. Jeder dieser n Geraden entspricht ein bestimmtes Oval w_3 in der T, U-Ebene, welches in dem Sinne umlaufen wird, wie jene Gerade den Punkt $t + iu = -\infty$ umläuft. Da die n Geraden w_3 der Reihe nach durch sämtliche Streifen der t, u-Ebene ziehen, so müssen die entsprechenden Wege in der T, U-Ebene der Reihe nach sämtliche unendlich vielen Blätter durchlaufen, indem sie bei je einmaliger Umkreisung der Windungspunkte den Verzweigungsschnitt passieren. Diese n-zügigen Kassinoiden sind also nur geschlossene Kurven, wenn wir sie durch unendlich viele Blätter verfolgen.

d) Etwas komplizierter erscheinen die Beziehungen von Figur und Bild für eine Gerade w_4 der t, u-Ebene, welche die Gleichung $t > t'$ besitzt (s. S. 23), also in jedem Streifen den Verzweigungsschnitt zweimal überschreitet. Eine solche Gerade verläuft somit in zwei Blättern, denn gelangt sie bei erstmaligem Überschreiten des Verzweigungsschnittes in ein neues Blatt, so kehrt sie bei erneutem Überschreiten in das alte zurück. Auch diese Gerade w_4 ist n-fach zu denken, und zwar gehört die erste der n Geraden zu Blatt I und II, die zweite zu Blatt II und III, die p^{te} zu Blatt P und $P+1$, die n^{te} zu Blatt N und I. Jeder dieser n Geraden entspricht ein Zug einer n-zügigen Kassinoide der T, U-Ebene, welche n Züge sich um die Windungspunkte $[+\infty]$ in demselben Sinne legen, wie die Gerade w_4 um den Punkt $t + iu = \infty$. Da jede der n Geraden in der t, u-Ebene in zwei Blättern verläuft, so gehört jedes der n kleinen Ovale in der T, U-Ebene zu zwei Gebieten. Da ferner jede der Geraden durch sämtliche Streifen zieht, so muss jeder der entsprechenden Wege successive in jedes der unendlich vielen Blätter gelangen, bei je einmaligem Umlaufen des Windungspunktes den Verzweigungsschnitt überschreitend. Fig. 4c zeigt einen Querschnitt der t, u-Ebene längs eines Stückes der Geraden w_4.

e) Endlich sei noch eine Gerade w_5 der t, u-Ebene betrachtet, die, parallel der u-Axe laufend, den Verzweigungsschnitt in jedem Streifen nur einmal überschreitet. Da für sie $0 < t < t'$, so entspricht ihr in der T, U-Ebene eine einzügige Kassinoide. Diese Gerade w_5 ist ebenfalls n-fach zu denken. Jede dieser n Geraden gehört in einem und demselben Streifen je einem der n Blätter an, und zwar in jedem Streifen einem andern Blatte, da sie den Verzweigungsschnitt einmal überschreitet. Nachdem sie n Streifen durchlaufen, ist sie in das ursprüngliche Blatt zurückgekehrt. — Die Kassinoide der T, U-Ebene durchzieht die n Gebiete und gelangt bei jedem Überschreiten eines Verzweigungsschnittes in ein neues Blatt. Sie ist n-fach zu denken, da der Ausgangspunkt im p^{ten} Gebiete und dem ersten Blatt zu suchen ist, wenn der Ausgangspunkt der Geraden w_5 im p^{ten} Blatte und dem ersten Streifen lag. Die Kassinoide wird in dem Sinne durchlaufen, dass der Koordinatenanfang so zu ihr liegt, wie der entsprechende Punkt B der t, u-Ebene zur Geraden w_5.

Nach dem Gesagten ist es nun nicht schwer, zu zeigen, welche Kurvenstücke in der T, U-Ebene bestimmten Stücken von Geraden der t, u-Ebene entsprechen, sowie jedem Teile der einen Ebene seinen bestimmten Bereich in der anderen Ebene

zuzuordnen. (Wir beschränken uns im folgenden auf ein Gebiet der Bildebene, da für die übrigen dasselbe gilt.) Betrachten wir zunächst die Hyperbel des Büschels, welche zu $u = 0$ und $u = \frac{\pi}{\varkappa}$ gehört. Da der dem Punkte $u = 0$, $t = 0$ entsprechende Punkt der T, U-Ebene im Endlichen liegt, so entspricht der Geraden $u = 0$ das Stück der Hyperbel, welches zwischen den beiden Büschelpunkten liegt und durch diesen Punkt geht. Die Gerade $u = \frac{\pi}{\varkappa}$ wird in das Übrige der Hyperbel abgebildet und zwar das Stück $u = \frac{\pi}{\varkappa}$, $t < 0$ in denjenigen Ast, der aus dem Unendlichen kommend im Verzweigungspunkte $[-\infty]$ endigt, der Teil $u = \frac{\pi}{\varkappa}$, $t > 0$ in den vom Verzweigungspunkt $[+\infty]$ ins unendlich Weite verlaufenden Ast. Die Gerade $t = 0$ wird in die Hyperbel der Schar abgebildet. Jenachdem für diese Gerade $u \gtrless 0$, erhalten wir einen der beiden Teile der Hyperbel, in welche dieselbe durch die Hyperbel des Büschels zerfällt. Welcher Teil zu nehmen ist, erhellt daraus, dass wir, vom Koordinatenanfang $t = 0$, $u = 0$ aus längs der Geraden $t = 0$ gehend, den Punkt $t + iu = -\infty$ zur Linken oder zur Rechten haben, jenachdem $u > 0$ oder $u < 0$, dass also die entsprechenden Kurvenstücke der Hyperbel so zu wählen sind, dass im ersten Falle der Büschelpunkt $[-\infty]$ zur Linken, im zweiten Falle zur Rechten liegt.

Wir betrachten zum Schlusse noch die Lemniskate des Büschels. Dieselbe entspricht den Geraden $u = u'$ und $u = u''$. Da die erstere den Teil der t-Axe kreuzt, für welchen $u < 0$, so entspricht ihr der Teil der Lemniskate, welcher, die beiden Büschelpunkte verbindend, den oben bezeichneten Teil der Hyperbel der Schar schneidet. Die Gerade $u = u''$ geht von $t + iu = -\infty$ durch den Verzweigungspunkt B nach $t + iu = \infty$. Demnach gehört zu ihr der Teil der Lemniskate, welcher von dem einen Büschelpunkt ausgehend durch den Koordinatenanfang nach dem andern Büschelpunkt zieht. Der Geraden $u = u''$, $t < t'$ entspricht dann die Lemniskate vom Büschelpunkte $[-\infty]$ nach dem Koordinatenanfang; der Geraden $u = u''$, $t > t'$ der Lemniskatenbogen vom Koordinatenanfang nach dem Büschelpunkte $[+\infty]$. Fig. 6a und 6b zeigen entsprechende Bereiche von Figur- und Bildebene durch römische Ziffern an.

§ 6.

Die Spezialfälle der Abbildung.

Nachdem wir im vorstehenden die Abbildung der einen Ebene auf die andere für den Fall geleistet haben, wo die in der abbildenden

Funktion vorkommenden Konstanten A, B, C, $\varkappa$, (α) beliebige Werte haben, sei es im folgenden unsere Aufgabe, zu untersuchen, wie die Abbildung modifiziert wird, wenn wir obigen Konstanten bestimmte spezialisierte Werte vorschreiben. Statt hier rein analytisch vorzugehen, d. h. alle zulässigen verschiedenen Wertkombinationen der Konstanten A, B, C, $\varkappa$, α aufzusuchen, wollen wir auf rein geometrischem Wege dasselbe Ziel zu erreichen suchen. Wir wissen bereits, dass die genannten Konstanten von bestimmendem Einfluss auf die Lage der zwei Gruppen von Büschelpunkten der T, U-Ebene sind. Je nach der Grösse und Drehung der beiden von letzteren gebildeten Polygone zueinander erhält das System von Kassinoiden einen andern Charakter. Die Drehung des einen Polygons gegen das andere messen wir dabei an dem Winkel zwischen den Radienvektoren nach zwei zusammengehörigen Büschelpunkten der beiden Punktgruppen. Indem wir die verschiedene oder gleiche Grösse der Polygone mit ihrer gegenseitigen Drehung kombinieren, erhalten wir die folgenden speziellen Fälle der Abbildung, deren charakteristische Konstanten wir an Ort und Stelle bestimmen werden.

I. Beide Polygone sind der Grösse nach endlich und verschieden von Null.

1. Die Polygone sind der Grösse nach verschieden.
   a) Sie sind beliebig gegeneinander gedreht. (Dies ist der bereits behandelte Hauptfall der Abbildung.)
   b) Sie sind um den Winkel 0^0 gegeneinander gedreht (sind ähnlich gelegen): Spezialfall I.
   c) Sie sind um den Winkel $\frac{\pi}{n}$ gegeneinander gedreht: Spezialfall II.
2. Die Polygone sind der Grösse nach gleich.*
   a) Sie sind beliebig gegeneinander gedreht: Spezialfall III.
   b) Sie sind um 0^0 gegeneinander gedreht (fallen zusammen).**
   c) Sie sind um $\frac{\pi}{n}$ gegeneinander gedreht: Spezialfall IV.

* In diesem Falle ist $A^2+B^2=1$, und da diese Gleichung für reelle A und B auf dreierlei Weise zu befriedigen ist, nämlich 1) durch $0<A<1, 0<B<1$; 2) durch $A=1$, $B=0$; 3) durch $A=-1$, $B=0$, so haben wir die im Text bemerkten drei Fälle zu unterscheiden.

** Da hier die Büschelpunkte der einen Gruppe mit denen der andern zusammenfallen, so zieht sich die ganze Abbildung der t, u-Ebene auf die T, U-Ebene in diese n doppeltzählenden Punkte zusammen und wird somit illusorisch.

II. Nur eines der beiden Polygone ist endlich und verschieden von Null.

a) Das zweite Polygon ist unendlich klein (Null): Spezialfall V.

b) Das zweite Polygon ist unendlich gross: Spezialfall VI.

III. Keines der beiden Polygone ist endlich und verschieden von Null.

a) Beide Polygone sind unendlich klein (Null): Spezialfall VII.

b) Beide Polygone sind unendlich gross: Spezialfall VIII.

c) Ein Polygon ist unendlich klein, das andere unendlich gross: Spezialfall IX.*

Weitere spezielle Fälle sind unmöglich.

Spezialfall I. (Fig. 7.)

Für die Konstanten der abbildenden Funktionen müssen wir, um die angezeigte Lage und Grösse der beiden Polygone zu erhalten, setzen: $A > 0$, $B = 0$, $\alpha = 0$, $\varkappa \neq 0$ und C beliebig, positiv. Dann ist

$$f = T + iU = C \sqrt[n]{\frac{1 + A e^{\varkappa(t+iu)}}{1 + e^{\varkappa(t+iu)}}},$$

und die Gleichungen der den Geraden $t = const$ und $u = const$ entsprechenden Kurven nehmen die Form an:

$$27) \quad \begin{cases} (T^2 + U^2)^n - C^n \dfrac{A e^{2\varkappa t} - 1}{e^{2\varkappa t} - 1} Q = C^{2n} \dfrac{1 - A^2 e^{2\varkappa t}}{e^{2\varkappa t} - 1}, \\ (T^2 + U^2)^n - \dfrac{C^n}{2}(A+1) Q - \dfrac{C^n}{2}(A-1) \cot \varkappa u \,.\, R = -C^{2n} \,.\, A. \end{cases}$$

Für die Koordinatenaxen $t = 0$ und $u = 0$ erhalten wir in der T, U-Ebene als entsprechende Kurven

$$Q = C^n (1 + A) \quad \text{und} \quad R = 0.$$

Ersteres ist eine Hyperbel, letzteres ein Büschel von n Geraden durch den Koordinatenanfang und je einen Büschelpunkt aus den beiden Gruppen.** Da nach früher bewiesenem Satze der Ort der Brennpunkte des einen Kurvensystems die Hyperbel des andern ist, so folgt in unserem Falle, dass die Brennpunkte der Kurvenschar in geraden Linien liegen.

Verstehen wir unter Axen der Kurven die Verbindungslinien der Brennpunkte mit dem Mittelpunkte (hier dem

---

* Von einer Drehung der Polygone zueinander kann in den Spezialfällen V bis IX selbstverständlich nicht gesprochen werden. Man verdeutlicht sich dies an der Abbildung auf die Kugel.

** Jenachdem n ungerade oder gerade ist, tragen sämtliche Geraden je zwei Büschelpunkte oder die Hälfte der Geraden je vier Büschelpunkte, die zu zwei nach entgegengesetzten Seiten vom Koordinatenanfang aus liegen.

Koordinatenanfang), so erhalten wir das Resultat: Die Kurven der Kassinoidenschar sind koaxial. Die weitere Diskussion der Eigenschaften der Kassinoiden von Schar und Büschel hat an den Wert von Λ anzuknüpfen.

Für die Kassinoiden der Schar ist:

$$\Lambda_t = C^{2n} \cdot \frac{1 - A^2 e^{2nt}}{e^{2nt} - 1}.$$

Wächst t von $-\infty$ bis $+\infty$, so wächst e^{2nt} von 0 bis $+\infty$, und nach letzterem Werte zu urteilen, haben wir folgende Kurvenarten: Für $0 < e^{2nt} < 1$ ist $\Lambda_t < 0$, d. h. diesen Geraden der t, u-Ebene entsprechen n-zügige Kassinoiden der T, U-Ebene, welche sich den Büschelpunkten [$t = -\infty$] als ihrer Grenze nähern. Den Geraden, für welche $1 < e^{2nt} < \frac{1}{A^2}$ ist, entsprechen einzügige Kassinoiden, denn es ist $\Lambda_t > 0$. Von den vorigen sind sie durch die Hyperbel, welche für $e^{2nt} = 1$ erhalten wurde, getrennt. Unter diesen einzügigen Kassinoiden befindet sich ein Kreis, welcher für $e^{2nt} = \frac{1}{A}$ erhalten wird. Seine Gleichung ist:

$$T^2 + U^2 = C^2 \cdot \sqrt[n]{A}.$$

Für $e^{2nt} = \frac{1}{A^2}$ ergiebt sich $\Lambda_t = 0$, d. h. dieser Geraden entspricht die Lemniskate. Für $e^{2nt} > \frac{1}{A^2}$ ist Λ_t wiederum kleiner als Null, d. h. wir erhalten abermals n-zügige Kassinoiden. — Den in der Kurvenschar vorkommenden Kreis haben wir uns n-fach zu denken, damit er als eine Kassinoide, d. h. eine Kurve $2n^{\text{ten}}$ Grades gelten kann. — Über die Lage der Brennpunkte der Kurven ist folgendes zu sagen: Ist $t < 0$, so liegen die Brennpunkte auf den Geraden vom Koordinatenanfang nach den Büschelpunkten. Für die Hyperbel, d. h. [$t = 0$], fallen sie unendlich weit. Für die einzügigen Kassinoiden $\left[1 < e^{2nt} < \frac{1}{A}\right]$ liegen die Brennpunkte auf den Geraden, welche die Winkel zwischen den vorhergenannten Geraden halbieren. Für den Kreis $\left[e^{2nt} = \frac{1}{A}\right]$ fallen sämtliche Brennpunkte im Koordinatenanfang zusammen, und wir können also sagen: Der Kreis, n-fach gedacht, ist eine Kassinoide n^{ter} Ordnung mit n zusammenfallenden Brennpunkten. Für alle Kurven, für welche $e^{2nt} > \frac{1}{A}$, fallen die Brennpunkte wieder auf die Geraden durch die Büschelpunkte. Doch ist zu

bemerken: Auf den Geraden durch die Büschelpunkte liegen Brennpunkte vom Koordinatenanfang bis zu den Büschelpunkten $[\infty]$, und von den Büschelpunkten $[-\infty]$ bis ins unendlich Weite — nicht aber auf den Stücken zwischen den Büschelpunkten —, während die andern Geraden stetig von Brennpunkten erfüllt sind.

Die Kassinoiden $[u = const]$ sind sämtlich n-zügig, denn es ist für diese Kurven $\Lambda_u = -C^{2n} \cdot A$ beständig negativ. Da ihre Brennpunkte auf einer Hyperbel liegen, so sind die Kurven nicht koaxial. — Über die Eindeutigkeit der Abbildung sowie die Riemann'schen Flächen wollen wir in diesem wie in den folgenden Spezialfällen keine Untersuchungen anstellen, doch bemerken wir, dass dieselben keinerlei Schwierigkeiten bieten.

Spezialfall II. (Fig. 8.)

Wir setzen wiederum $B = 0$, C beliebig, $\alpha = 0$, $\varkappa \neq 0$ und A negativ, jedoch verschieden von -1. Dann lautet die abbildende Funktion:

$$f = T + iU = C \sqrt[n]{\frac{1 - Ae^{\varkappa(t+iu)}}{1 + e^{\varkappa(t+iu)}}}.$$

Die Büschelpunkte $[t = -\infty]$ und $[t = +\infty]$ haben die Koordinaten: $T + iU = C\sqrt[n]{1}$ und $T + iU = C\sqrt[n]{-A}$. Den Geraden $t = const$ und $u = const$ entsprechen in der T, U-Ebene die Kassinoiden:

$$28) \quad \begin{cases} (T^2 + U^2)^n + C^n \dfrac{Ae^{2\varkappa t} + 1}{e^{2\varkappa t} - 1} Q = C^{2n} \dfrac{1 - A^2 e^{2\varkappa t}}{e^{2\varkappa t} - 1}, \\ (T^2 + U^2)^n - \dfrac{C^n}{2}(1 - A) Q + \dfrac{C^n}{2}(A + 1) \cot \varkappa u \cdot R = C^n \cdot A. \end{cases}$$

Für $t = 0$ resp. $u = 0$ ergiebt sich: $Q = C^n(1 - A)$ und $R = 0$. Ersteres ist eine Hyperbel, letzteres ein Büschel von n Geraden durch den Koordinatenanfang und die Büschelpunkte. Auf jeder Geraden liegen zwei Büschelpunkte, welche derselben Gruppe oder den beiden verschiedenen Gruppen angehören, jenachdem n gerade oder ungerade ist. Daraus folgt: Die Kassinoiden der Schar sind koaxial. Für diese Kurven ist nun $\Lambda_t = C^{2n} \dfrac{1 - A^2 e^{2\varkappa t}}{e^{2\varkappa t} - 1}$. Dies ist derselbe Ausdruck wie im vorigen Spezialfalle und ergeben sich daher wieder für $0 < e^{2\varkappa t} < 1$ n-zügige Kassinoiden, für $e^{2\varkappa t} = 1$ die Hyperbel, für $1 < e^{2\varkappa t} < \dfrac{1}{A^2}$ n-zügige Kassinoiden; $e^{2\varkappa t} = \dfrac{1}{A^2}$ giebt die Lemniskate und $e^{2\varkappa t} > \dfrac{1}{A^2}$ n-zügige Kassinoiden. Doch ist zu bemerken, dass hier

kein Kreis unter den Kurven existiert. Die Brennpunkte liegen auf den n Geraden zwischen den Büschelpunkten und dem unendlich fernen Punkte.

Da für die Kassinoiden, welche den Geraden $u = const$ entsprechen, $\Lambda_u = C^n A$, d. h. stets positiv ist, so sind sie sämtlich einzügig.

Spezialfall III. (Fig. 9.)

Die beiden Polygone, welche von den Büschelpunkten als Ecken gebildet werden, sind gleich gross, aber beliebig gegeneinander gedreht. Es ist dann $A^2 + B^2 = 1$. (A und B verschieden von Null und ± 1.) Die abbildende Funktion behält die allgemeine Form. Den Geraden $t = const$ und $u = const$ entsprechen die Kurven:

$$29) \quad \begin{cases} (T^2 + U^2)^n - C^n \dfrac{A e^{2\varkappa t} - 1}{e^{2\varkappa t} - 1} Q + C^n \dfrac{B e^{2\varkappa t}}{e^{2\varkappa t} - 1} R = - C^{2n}, \\ (T^2+U^2)^n - \dfrac{C^n}{2}(B \cot \varkappa u + A + 1) Q + \dfrac{C^n}{2}(B - [A-1] \cot \varkappa u) R = - C^{2n}(B \cot \varkappa u + A). \end{cases}$$

Die Koordinatenaxen $t = 0$ und $u = 0$ werden in die Kurven

$$(A - 1) Q - BR = 0 \quad \text{und} \quad BQ + (A - 1) R = 2 C^n B$$

abgebildet. Letzteres ist eine Hyperbel, dagegen ist ersteres die Gleichung eines Strahlenbüschels durch den Koordinatenanfang, denn führen wir Polarkoordinaten ein, so fällt der Radiusvektor aus der Gleichung heraus. Dieses Strahlenbüschel besteht aus n Geraden, welche senkrecht stehen zu den Verbindungslinien je zweier zusammengehöriger Büschelpunkte aus den beiden Gruppen. Sie schneiden sich demnach im Koordinatenanfange unter gleichen Winkeln $\frac{\pi}{n}$. Hieraus folgt nun: Die Kassinoiden des Kurvenbüschels sind koaxial. Im Übrigen klassifizieren sich diese Kurven, da Λ_u dasselbe ist, wie im allgemeinen Falle, ebenso, wie dies bereits dort geschehen ist.

Für die den Geraden $t = const$ entsprechenden Kurven ist $\Lambda_t = - C^{2n}$; dieselben sind demnach sämtlich n-zügige Kassinoiden. Unter den Kurven des Büschels befindet sich hier wiederum ein Kreis, welcher für $\cot \varkappa u = - \sqrt{\dfrac{1+A}{1-A}}$ erhalten wird und die Gleichung $T^2 + U^2 = C^2$ besitzt. Hierdurch unterscheidet sich das Kurvenbüschel wesentlich von dem im allgemeinen Falle, abgesehen davon, dass die Kurven koaxial sind.

Spezialfall IV. (Fig. 10.)

Sind die beiden Polygone gleich gross, dagegen um $\frac{\pi}{n}$ gegeneinander gedreht, so sind für die Konstanten die Werte $B = 0$, $A = -1$ zu setzen, und die abbildende Funktion wird:

$$f = T + iU = C \sqrt[n]{\frac{1 - e^{\varkappa(t+iu)}}{1 + e^{\varkappa(t+iu)}}}.$$

Die Büschelpunkte sind dann $T + iU = C\sqrt[n]{1}$ und $T + iU = C\sqrt[n]{-1}$. Den Geraden $t = const$ und $u = const$ entsprechen in der Ebene der T, U die Kassinoiden:

$$30) \qquad \begin{cases} (T^2 + U^2)^n + C^n \dfrac{e^{2\varkappa t} + 1}{e^{2\varkappa t} - 1} Q = -C^{2n}, \\ (T^2 + U^2)^n + C^n \cot \varkappa u \, . \, R = C^{2n}. \end{cases}$$

Da für die ersteren $\Lambda_t = -C^{2n}$, für die letzteren $\Lambda_u = C^{2n}$, so erhellt, dass die Kassinoiden der Schar sämtlich n-zügig, die des Büschels durchaus einzügig sind. Für die Koordinatenaxen $t = 0$ und $u = 0$ ergeben sich als entsprechende Kurven $Q = 0$ und $R = 0$. Dies sind $2n$ Gerade durch den Koordinatenanfang, von denen die n letzteren durch die Büschelpunkte gehen, während die n ersteren die Winkel zwischen je zwei der Geraden des Büschels $R = 0$ halbieren. Unter den Kurven des Büschels befindet sich ein Kreis, dessen Gleichung aus 30) für $u = \frac{\pi}{2\varkappa}$ erhalten wird, nämlich: $T^2 + U^2 = C^2$. Da in diesem Spezialfall beide Hyperbeln in gerade Linien ausgeartet sind, so haben wir das Resultat: Sowohl die Kassinoiden der Schar als die des Büschels sind koaxiale Kurven.*

Spezialfall V. (Fig. 11.)

Wir gelangen hiermit zu der Klasse von Spezialfällen, wo eines der beiden Polygone oder beide unendlich klein oder unendlich gross werden. Zunächst sei das Polygon der Büschelpunkte $[-\infty]$ noch endlich, d. h. C endlich; die n Büschelpunkte $[+\infty]$ fallen im Koordinatenanfang zusammen. Dann muss $A = B = 0$ sein, und die abbildende Funktion wird:

$$f = T + iU = C \sqrt[n]{\frac{1}{1 + e^{\varkappa(t+iu)}}}.$$

---

* Für $n = 2$ behandelte diesen Fall Wangerin, Grunerts Archiv 55; doch ist daselbst Null- und Unendlichkeitspunkt der T, U-Ebene vertauscht.

Den Geraden $t = const$ und $u = const$ entsprechen in der T, U-Ebene die Kurven:

$$31) \quad \begin{cases} (T^2 + U^2)^n + \dfrac{C^n}{e^{2\varkappa t} - 1} Q = \dfrac{C^{2n}}{e^{2\varkappa t} - 1}, \\ (T^2 + U^2)^n - \dfrac{C^n}{2} Q + \dfrac{C^n}{2} \cot \varkappa u \,.\, R = 0. \end{cases}$$

Da wir für $t = 0$ und $u = 0$ $Q = C^n$ resp. $R = 0$ erhalten, d. h. eine Hyperbel und ein Strahlenbüschel, so folgt: Die Kassinoiden der Schar sind koaxial, die des Büschels nicht. Für die Kassinoiden der Schar ist $\Lambda = \dfrac{C^{2n}}{e^{2\varkappa t} - 1}$, d. h.: diese Kurven sind n-zügig, wenn $-\infty < t < 0$, sie sind einzügig, wenn $0 < t < \infty$. Die Hyperbel, welche der Geraden $t = 0$ entspricht, trennt die Kurven der verschiedenen Art. — Für die Kurven des Büschels ist $\Lambda_u = 0$, und diese Gleichung sagt aus, dass sämtliche Kurven des Büschels Lemniskaten n^{ter} Ordnung sind.

Spezialfall VI. (Fig. 12.)

Das Polygon, dessen Eckpunkte von den Büschelpunkten $[-\infty]$ gebildet werden, sei endlich, also C von endlichem Werte, das andere Polygon dagegen werde unendlich gross. Es ist hier $B = 0$, $A = \infty$ zu setzen. Damit aber $T + iU$ nicht identisch unendlich gross wird, verfügen wir über die bisher stets Null gesetzte Konstante α in andrer Weise. Es sei nämlich $\alpha = -\infty$, jedoch so, dass $A \,.\, e^{\alpha} = 1$ ist. Dann lautet die abbildende Funktion:

$$f = T + iU = C \sqrt[n]{1 + e^{\varkappa(t + iu)}}.$$

Wir können nun die Gleichungen der den Geraden $t = const$ und $u = const$ entsprechenden Kurven in der T, U-Ebene nicht mehr direkt aus den Kurvengleichungen im allgemeinen Falle ableiten und entwickeln sie daher aus der gegebenen abbildenden Funktion in bekannter Weise. Es ergiebt sich:

$$32) \quad \begin{cases} (T^2 + U^2)^n - C^n \,.\, Q = C^{2n} (e^{2\varkappa t} - 1), \\ Q + R \cot \varkappa u = 2 C^n. \end{cases}$$

Die Kurven, welche den Geraden $u = const$ entsprechen, sind Hyperbeln, deren Brennpunkte natürlich im unendlich Fernen liegen. Dies war vorauszusehen, da wir Kurven erhalten müssen, die sämtlich durch die n unendlich fernen Büschelpunkte gehen. Die Kassinoiden, welche den Geraden $t = const$ entsprechen, sind, da $\Lambda_t = C^{2n} (e^{2\varkappa t} - 1)$ ist, n-zügig oder einzügig, jenachdem $t < 0$ oder $t > 0$. Beide Kurven-

arten werden durch die der Koordinatenaxe $t = 0$ entsprechende Lemniskate

$$(T^2 + U^2)^n - C^n Q = 0$$

getrennt. Diese Kassinoiden der Schar sind nicht nur koaxial, sondern konfokal, d. h. ihre Brennpunkte fallen zusammen, und zwar in den n endlichen Büschelpunkten. Denn dass sie koaxial sind, folgt daraus, dass ihre Brennpunkte auf den zum Hyperbelbüschel gehörigen Geraden $R = 0$ liegen. (Diese Geraden entsprechen der Axe $u = 0$.) Da sich aber ferner für den Abstand der Brennpunkte vom Koordinatenanfang $\sqrt{a^2 + b^2} = C$ ergiebt, d. h. ein von t unabhängiger Wert, so sind sämtliche Kassinoiden konfokal*.

Spezialfall VII.

Dieser und der folgende Spezialfall sind die bereits bei Aufstellung der Differentialgleichung und ihrer Integration erwähnten Fälle, in denen der Konstanten $\varkappa$ der spezielle Wert Null gegeben wird. Wir leiten die abbildende Funktion wiederum aus dem allgemeinen Falle durch Spezialisierung der Konstanten ab. Es sollen zunächst beide Polygone, deren Ecken die $2n$ Büschelpunkte bilden, unendlich klein werden. Dann ist $C = 0$. Um nicht $f = 0$ zu erhalten, müssen wir noch über α, A und B in geeigneter Weise verfügen. Setzen wir zunächst $B = 0$, $A = -1$ und $\alpha = i\pi$, so erhalten wir:

$$f = T + iU = \sqrt[n]{C^n \frac{1 + e^{\varkappa(t+iu)}}{1 - e^{\varkappa(t+iu)}}},$$

oder, wenn wir die Exponentialfunktionen in Reihen entwickeln:

$$T + iU = \sqrt[n]{C^n \cdot \frac{2 + \varkappa(t+iu) + \frac{\varkappa^2}{2}(t+iu)^2 + \dots}{-\varkappa(t+iu) - \frac{\varkappa^2}{2}(t+iu)^2 - \dots}}.$$

Setzen wir nun ferner $\varkappa = -2C^n$, so ergiebt sich:

$$T + iU = \sqrt[n]{\frac{1 - C^n(t+iu) + \dots}{t + iu - C^n(t+iu)^2 \pm \dots}}.$$

Lassen wir jetzt C, und damit nach obigem auch $\varkappa$ Null werden, so resultiert schliesslich als abbildende Funktion die folgende:

$$f = T + iU = \sqrt[n]{\frac{1}{t+iu}}.$$

---

* Für $n = 2$ gab diesen Fall der konfokalen Kurven bereits Lamé. Die Hyperbeln n^{ter} Ordnung sind dort gleichseitige Hyperbeln (Kegelschnitte), s. Leçons sur les coordonées curvilignes, Cap. 13.

Die $2n$ Büschelpunkte fallen in der That sämtlich in den Koordinatenanfang. Die den Geraden $t = const$ und $u = const$ entsprechenden Kurven in der T, U-Ebene sind:

$$33) \qquad \begin{cases} (T^2 + U^2)^n - \dfrac{1}{2t} \cdot Q = 0, \\ (T^2 + U^2)^n - \dfrac{1}{2u} \cdot R = 0, \end{cases}$$

d. h.: sämtliche Kurven sind Lemniskaten n^{ter} Ordnung. Den Koordinatenaxen $t = 0$ und $u = 0$ entsprechen die beiden schon mehrfach betrachteten Strahlenbüschel $Q = 0$ und $R = 0$. Beide Lemniskatenbüschel sind also koaxial, jedoch nicht konfokal. Es mag bemerkt werden, dass in diesem, sowie im folgenden Spezialfalle die ganze t, u-Ebene n-fach auf die T, U-Ebene abgebildet wird. Daher ist hier die T, U-Ebene einblättrig, die t, u-Ebene, wie bisher, n-blättrig.

Spezialfall VIII.

Es sollen beide Polygone unendlich gross werden. Wir erreichen dies, indem wir $A = \infty$ setzen, und zwar in folgender Weise. Entwickeln wir im allgemeinsten Falle der abbildenden Funktion die Exponentialfunktion in Reihen, nachdem wir $B = 0$ gesetzt haben, so ergiebt sich:

$$f = T + iU = C \sqrt[n]{\frac{1 + Ae^{\alpha} + Ae^{\alpha} \varkappa (t + iu) + Ae^{\alpha} \frac{\varkappa^2}{2} (t + iu)^2 + \dots}{1 + e^{\alpha} + e^{\alpha} \cdot \varkappa (t + iu) + \dots}}$$

Es sei nun $e^{\alpha} = \delta$, $\varkappa = \delta$, $A = \frac{1}{\delta^2}$. Dann geht vorstehendes über in

$$f = T + iU = C \sqrt[n]{\frac{1 + \frac{1}{\delta} + t + iu + \frac{\delta}{2} (t + iu) + \dots}{1 + \delta + \delta^2 (t + iu) + \dots}}$$

Lassen wir nun δ sich der Null nähern, so dass also $\alpha = -\infty$, $\varkappa = 0$, $A = \infty$ ist, so erhalten wir:

$$f = T + iU = C \sqrt[n]{1 + \frac{1}{\delta} + t + iu}.$$

Schliesslich verschieben wir noch das Koordinatensystem der t, u parallel der u-Axe um $1 + \frac{1}{\delta}$, um eine Abbildung im Endlichen zu erhalten, und finden somit als abbildende Funktion

$$f = T + iU = C \sqrt[n]{t + iu}.$$

Den Geraden der t, u-Ebene, $t = const$ und $u = const$, entsprechen in der T, U-Ebene die Kurven:

34) $$Q = C^n . 2t \quad \text{und} \quad R = - C^n . 2u,$$

d. h.: Dem System orthogonaler Geraden der t, u-Ebene entspricht ein System orthogonaler Hyperbeln n^{ter} Ordnung in der T, U-Ebene. Den Koordinatenaxen $t = 0$ und $u = 0$ entsprechen die je n Geraden $Q = 0$ und $R = 0$. Es sei bemerkt, dass dieser Spezialfall aus dem vorigen, ebenso wie VI aus V durch Inversion mittelst reziproker Radien erhalten werden kann. Die Richtigkeit dieser Behauptung ist leicht durch Betrachtung der abbildenden Funktionen zu erhärten. Überdies erhellt bei solchen Inversionen mittelst reziproker Radien noch die Richtigkeit des Satzes: Die Geraden eines Strahlenbüschels ($Q = 0$, resp. $R = 0$ u. s. w.) können sowohl als ausgeartete Hyperbel aufgefasst werden, wie als Lemniskate, welche, unendlich gross geworden, ihre Brennpunkte im unendlich Weiten hat.

Spezialfall IX.

Es soll das eine Polygon der Büschelpunkte unendlich klein, das andere unendlich gross werden. Wir setzen zu dem Behufe $A = 0$, $B = 0$, so dass:

$$f = T + iU = \sqrt[n]{\frac{C^n}{1 + e^{\varkappa(t+iu)+\alpha}}} = \sqrt[n]{\frac{1}{\frac{1}{C^n} + \frac{e^\alpha}{C^n} e^{\varkappa(t+iu)}}}.$$

Lassen wir nun gleichzeitig α und C unendlich gross werden, jedoch so, dass $\frac{e^\alpha}{C^n} = 1$ wird, so erhalten wir für die abbildende Funktion:

$$f \quad T + iU = \sqrt[n]{\frac{1}{e^{\varkappa(t+iu)}}}.$$

Den Punkten $t + iu = -\infty$ und $t + iu = \infty$ entsprechen in der T, U-Ebene die Punkte $T + iU = \infty$ und $T + iU = 0$. Für die den Geraden $t = const$ und $u = const$ entsprechenden Kurven in der T, U-Ebene erhalten wir die Gleichungen:

35) $$T^2 + U^2 = \frac{1}{\sqrt[n]{e^{2\varkappa t}}}; \qquad Q - R \cot \varkappa u = 0,$$

d. h.: Die Orthogonalschar der Geraden der t, u-Ebene wird in ein System konzentrischer Kreise nebst orthogonalen Geraden der T, U-Ebene abgebildet. Die Brennpunkte der Kreise

insofern wir diese als Kassinoiden betrachten, fallen im Koordinatenanfange zusammen. Den Koordinatenaxen $t = 0$ und $u = 0$ entsprechen der Kreis $T^2 + U^2 = 1$ und die n Geraden $R = 0$. Die t, u-Ebene ist n-blättrig, die T, U-Ebene wie im allgemeinen Falle von unendlich vielen Blättern überdeckt.

Schlusswort.

Indem wir, was die analytischen Untersuchungen betrifft, die sich an das Vorstehende anschliessen lassen, auf die Seite 11 zitierten Schriften verweisen, wollen wir zum Schlusse der Arbeit von Lucas gedenken, in welcher allgemeinere Kurven $2n^{\text{ten}}$ Grades betrachtet werden, von denen unsere Kassinoiden ein Spezialfall sind. Es sollen daselbst die Wurzeln von $F(z) = 0$ diskutiert werden, wenn z ein komplexes Argument und $F(z)$ ein algebraisches Polynom vom n^{ten} Grade ist. Ist dann $F(z) = \mathrm{X} + i\mathrm{Y}$, und $\lambda = \mu + i\nu$ ein willkürlicher Parameter, so nennt Herr Lucas die Kurven $(\mathrm{X} - \mu)^2 + (\mathrm{Y} - \nu)^2 = const$ Cassinoides, die Kurven $\frac{\mathrm{Y} - \nu}{\mathrm{X} - \mu} = const$ Stelloides*. Die von uns behandelten Kurven sind nun hiervon ein Spezialfall: Es hat $F(z)$ die spezielle Form $F(z) = (T + iU)^n$, und die vorstehende erstere Gleichung führt dann auf:

$$(Q - q)^2 + (R - r)^2 = 4\lambda^{2n},$$

was mit Gleichung 3) identisch ist. Wir müssten dementsprechend unsere Kurven reguläre Kassinoiden und Stelloiden nennen, da sie symmetrisch gegen jede der Axen sind. Die Abbildung der Geraden $t = const$ und $u = const$ der einen Ebene in die allgemeinen Lucasschen Kurven der T, U-Ebene wird dann durch die Funktion

$$\sum_{\nu=0}^{\nu=n} A_\nu (T + iU)^\nu = C^n \frac{1 + (A + iB)\, e^{\varkappa(t+iu)}}{1 + e^{\varkappa(t+iu)}}$$

geleistet, wo die A_ν reelle oder komplexe Konstanten sind. Den Punkten $t + iu = \pm\infty$ entsprechen in der T, U-Ebene je n Punkte, welche durch die Wurzeln der beiden Gleichungen

---

* Lucas behandelt nur drei einfache Fälle für $n = 3$; α) beide Kurvensysteme sind Stelloiden; β) homofokale Kassinoiden und Stelloiden; drei Grenzpunkte liegen im endlichen getrennt, die andern natürlich unendlich weit; γ) homofokale Kassinoiden und Stelloiden. Von den drei Grenzpunkten der einen Gruppe fallen zwei zusammen. Den Fall zweier Systeme von Kassinoiden behandelt Lucas nicht.

Fig. 2.

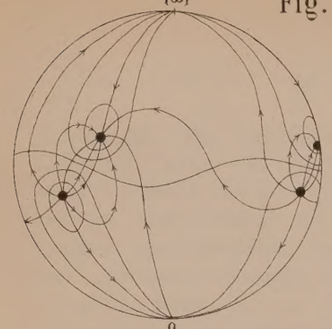


Fig. 3.

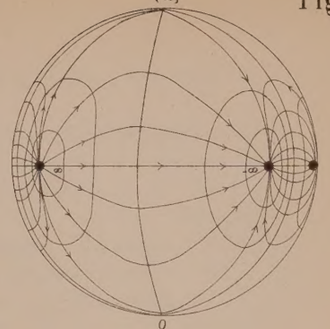


Fig. 5c.

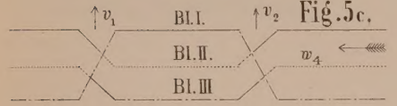


Fig. 5a.

Fig. 5b.

Fig. 4b.

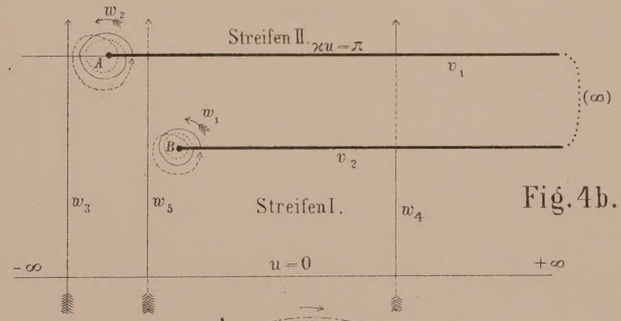


Fig. 4a.

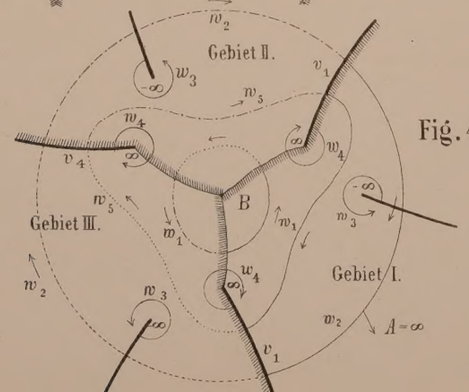
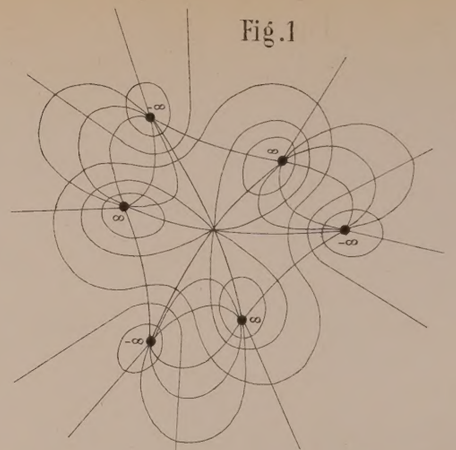


Fig. 1



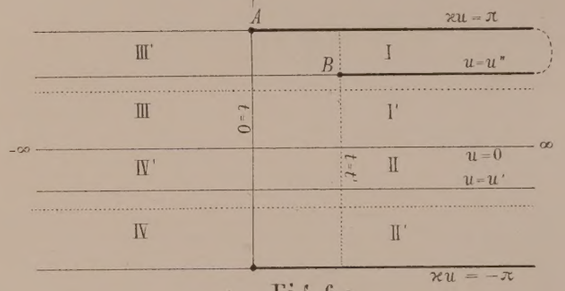


Fig. 6 a.

Fig. 6 b.

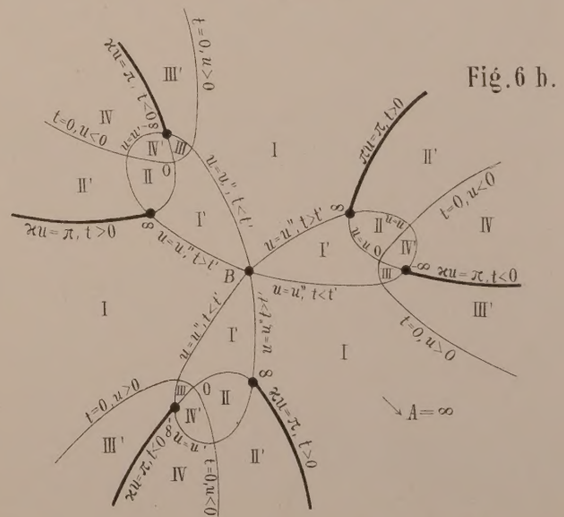


Fig. 9.

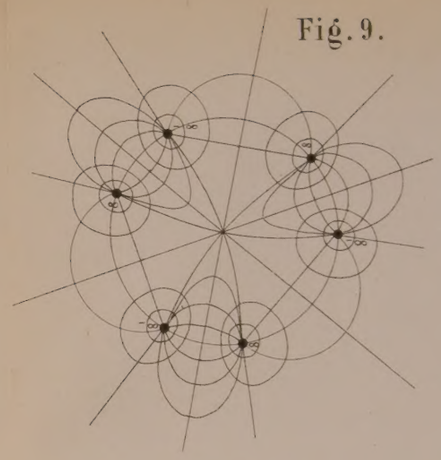


Fig. 7.

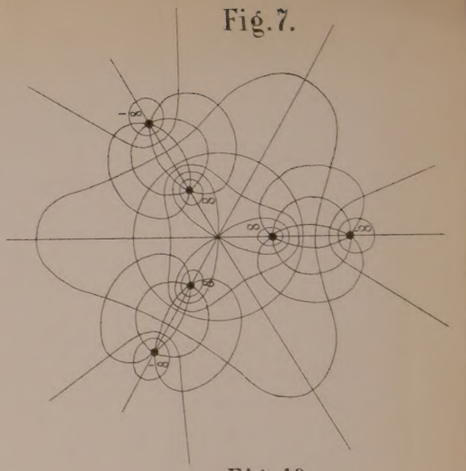


Fig. 8.

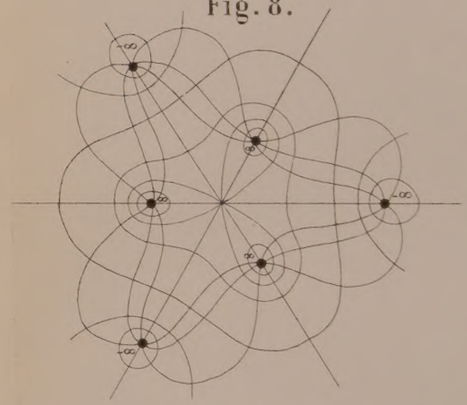


Fig. 10.

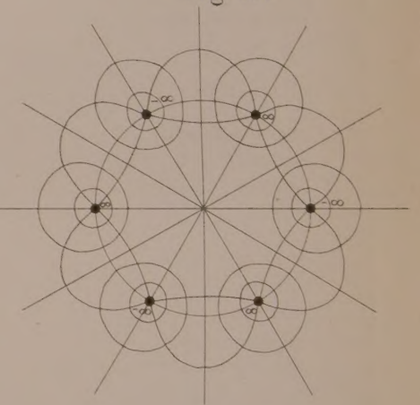


Fig. 11.

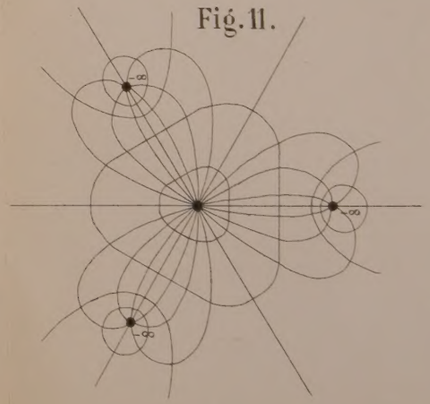
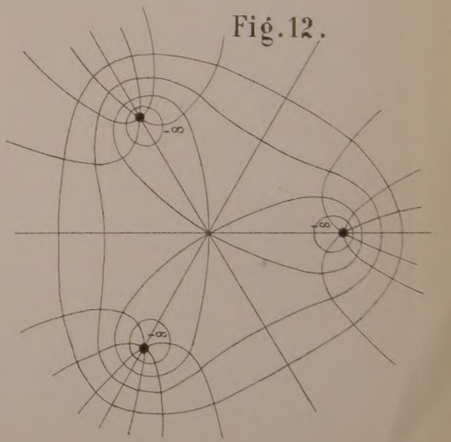


Fig. 12.



$$\sum_{p=0}^{p=n} A_p (T + iU)^p - C^n = 0, \quad \sum_{p=0}^{p=n} A_p (T + iU)^p - (A + iB) C^n = 0$$

gegeben sind. Die Lage dieser je n Punkte (Büschelpunkte), die im allgemeinen nicht mehr die Ecken zweier regulärer Polygone bilden, hängt wesentlich von den Werten der Konstanten A_p ab. Es können beliebige dieser Punkte aus derselben oder aus den verschiedenen Gruppen zusammenfallen, wenn die obigen Gleichungen mehrfache oder gemeinsame Wurzeln besitzen; es können einzelne Punkte ins Unendliche fallen, u. s. w. Kurvenschar und Kurvenbüschel können daher schon in den einfachsten Fällen ($n = 2, 3, \ldots$) die verschiedenartigsten Formen haben.

Vita.

Ich, Johannes Max Brückner, Sohn des Rentamtmann Brückner in Marienberg, wurde am 5. August des Jahres 1860 in Harthau bei Zittau geboren. Den ersten Unterricht genoss ich in der IV. Bürgerschule zu Dresden-Neustadt und der Selektenschule in Schwarzenberg. Ostern 1874 wurde ich in die Quarta der Realschule I. Ordnung zu Zwickau aufgenommen. Nachdem ich Ostern 1880 das Maturitätsexamen unter dem Rektorate des Herrn Professor Dr. Oertel bestanden, bezog ich die Universität zu Leipzig, um mich dem Studium der Mathematik und Physik zu widmen. Im Dezember 1884 bestand ich die Prüfung pro facultate docendi und wurde alsbald vom hohen königl. Ministerium des Kultus und öffentlichen Unterrichts der Annenschule (Realgymnasium) zu Dresden-Altstadt zur Erstehung des Probejahres zugewiesen.

Während meiner Studienzeit hörte ich Vorlesungen der Herren Professoren und Dozenten Hankel, Hofmann, Klein, Masius, Mayer, von der Mühll, Neumann, von Noorden, Rohn, Roscher, Scheibner, Schur, Wolff, Wundt, Zöllner, und beteiligte mich an den Übungen und Seminarien der Herren Hankel, Hofmann, Masius, Mayer, von der Mühll, Neumann. Ich erlaube mir an dieser Stelle, allen meinen hochgeehrten Lehrern für mannigfache Anregung und Förderung meiner Studien meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.